

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN

FACULTAD DE INGENIERÍA MECÁNICA Y ELÉCTRICA



PROBLEMA BIOBJETIVO DEL AGENTE VIAJERO CON
MÚLTIPLES VIAJES

POR

EDUARDO VALDÉS GARCÍA

EN OPCIÓN AL GRADO DE

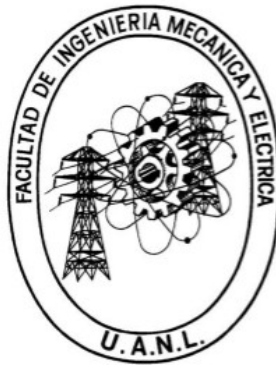
MAESTRÍA EN CIENCIAS

EN INGENIERÍA DE SISTEMAS

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN

FACULTAD DE INGENIERÍA MECÁNICA Y ELÉCTRICA

SUBDIRECCIÓN DE ESTUDIOS DE POSGRADO



PROBLEMA BIOBJETIVO DEL AGENTE VIAJERO CON
MÚLTIPLES VIAJES

POR

EDUARDO VALDÉS GARCÍA

EN OPCIÓN AL GRADO DE

MAESTRÍA EN CIENCIAS

EN INGENIERÍA DE SISTEMAS

Universidad Autónoma de Nuevo León
Facultad de Ingeniería Mecánica y Eléctrica
Subdirección de Estudios de Posgrado

Los miembros del Comité de Tesis recomendamos que la Tesis «Problema Biobjetivo del Agente Viajero con Múltiples Viajes», realizada por el alumno Eduardo Valdés García, con número de matrícula 1707087, sea aceptada para su defensa como opción al grado de Maestría en Ciencias en Ingeniería de Sistemas.

El Comité de Tesis

Dra. Ada Margarita Álvarez Socarrás

Asesor

Dr. José Marcos Moreno Vega

Revisor

Dr. Igor Semionovich Litvinchev

Revisor

Vo. Bo.

Dr. Simón Martínez Martínez

Subdirector de Estudios de Posgrado

San Nicolás de los Garza, Nuevo León, abril 2016

A mi madre.

*Por su inigualable apoyo,
compañía, guía y fortaleza.*

Índice general

Resumen	XIII
Objetivos y método de estudio:	XIII
Contribuciones y conclusiones:	XIV
 Nomenclatura	 1
 1. Introducción	 2
1. Descripción del problema	2
2. Hipótesis	4
3. Justificación del estudio	4
4. Objetivos de la tesis	4
5. Estructura de la tesis	5
 2. Marco Teórico	 6
1. El Problema del Agente Viajero	7
2. El Problema de Mínima Latencia	9
3. Problema del Agente Viajero con Múltiples Viajes	12
4. Problema de Mínima Latencia con Múltiples Viajes	14

5.	Enfoques Biobjetivo	18
6.	Optimización Multiobjetivo	18
6.1.	Nociones básicas	18
6.2.	Cotas del conjunto no dominado	22
6.3.	Métodos multiobjetivo de solución	24
	Método de la Suma Ponderada	26
	Método de las ε -restricciones	29
	Método AUGMECON 2	31
3.	Descripción y modelación del problema	35
1.	Modelo basado en latencia	36
2.	Modelo basado en costo	43
3.	Análisis del contraste de los objetivos	47
4.	Métodos de Solución	50
1.	Métodos exactos	51
1.1.	Suma ponderada	51
1.2.	AUGMECON 2	52
2.	Métodos heurísticos	53
2.1.	VNS	53
	Relocalización de clientes	53
	Intercambio de clientes	55
	Permutación inter-viajes	55
	Inversión intra-viaje	56

2.2.	NSGA-II	56
	Población inicial	58
	Selección	58
	Cruzamiento	59
	Mutación	60
	Introducción de nuevos individuos	61
2.3.	GRASP	61
	Enfoque multiobjetivo	62
	Sobre la calidad del frente obtenido	64
5.	Experimentación Computacional	65
1.	Descripción de las instancias	66
2.	Métricas de desempeño	66
3.	Frentes de Pareto exactos	67
3.1.	Comparación de métodos exactos	67
3.2.	¿Cuál formulación es la indicada?	69
3.3.	Partiendo de una solución inicial...	70
3.4.	Alcance de AUGMECON2	71
4.	Metaheurísticas	72
4.1.	Ajuste de parámetros para GRASP	72
4.2.	Ajuste de parámetros para NSGA-II	74
	Prueba de Friedman	76
	Análisis de varianza para hipervolumen	76
	Análisis de varianza para cardinalidad de los frentes obtenidos . .	79

Análisis de varianza para tiempo de ejecución	80
Conclusiones	81
4.3. Comparación del algoritmo GRASP y el NSGA-II	82
4.4. Eficacia de las metaheurísticas	82
6. Conclusiones	87
Apéndice A. Desglose de experimentación	89
Apéndice B. Frentes de Pareto exactos para instancias de 10 clientes	93
Apéndice C. Frentes de Pareto exactos para instancias de 15 clientes	99
Apéndice D. Frentes de Pareto obtenidos por GRASP para instancias de 10, 15, 20 y 40 clientes	107
Apéndice E. Frentes de Pareto obtenidos por NSGA-II para instancias de 10, 15, 20 y 40 clientes	174

Índice de figuras

2.1. Costo vs Latencia	9
2.2. Red multinivel para MLP[1]	11
2.3. Red multinivel para MLP con múltiples viajes[2]	16
2.4. Diferencia entre los dos enfoques de latencia	18
2.5. Ilustración de un frente de Pareto.	21
2.6. Conjunto débilmente no dominado de la Figura 2.5.	22
2.7. Cotas del conjunto no dominado	23
2.8. Método gráfico para suma ponderada	28
2.9. Soluciones encontradas por suma ponderada	29
2.10. Soluciones encontradas ε -restricciones	30
2.11. Funcionamiento del método AUGMECON2.	32
2.12. Diagrama de flujo del método AUGMECON2	34
3.1. Red multinivel para modelación basada en latencia.	36
3.2. Importancia del orden en los viajes para la latencia	37
3.3. Red multinivel para la ruta mostrada en la Figura 3.2b.	42
3.4. Ejemplo de un subtour en una ruta	45

3.5. Distancia y latencia mínima de instancias de 10 clientes.	47
3.6. Distancia y latencia mínima de instancias de 15 clientes.	48
3.7. Histograma de la cardinalidad de los frentes de Pareto.	49
4.1. Relocalización del cliente i inmediatamente después del cliente j	54
4.2. Intercambio de posición entre los clientes i y j	55
4.3. Ejemplo cruzamiento NSGA-II	60
5.1. Caja de bigotes AUGMECON2 vs Suma ponderada	68
5.2. Cardinalidad de los frentes obtenidos por AUGMECON2 y suma ponderada.	69
5.3. Gráfica de bigotes para efecto de solución inicial	71
5.4. Gráficas de medias para los parámetros de GRASP	73
5.5. Gráficas de medias de los parámetros de NSGA-II para hipervolumen. . .	77
5.6. Diferencias entre las medias de los niveles para los factores significativos de NSGA-II.	77
5.7. Diferencias entre las medias de los niveles para los factores significativos de la prueba de aumento de población en NSGA-II.	78
5.8. Gráficas de medias de los parámetros de NSGA-II para cardinalidad del frente.	79
5.9. Gráficas de medias y diferencias entre las medias de los niveles para los factores significativos en tiempo de ejecución para NSGA-II.	81
5.10. Medianas para los diferentes tamaños de instancia de las medidas de desempeño para GRASP y NSGA-II.	83
5.11. Comparación de los algoritmos heurísticos contra los frentes obtenidos por AUGMECON2	84

5.12. Eficacia de los algoritmos heurísticos sobre dos instancias muestra de 10 clientes.	85
5.13. Eficacia de los algoritmos heurísticos sobre dos instancias muestra de 15 clientes.	86

Índice de tablas

2.1. Tabla de pagos para aproximar punto nadir	24
2.2. Comparación de los métodos de solución	34
5.1. Mejores configuraciones obtenidas por pruebas no paramétricas para GRASP.	74
5.2. Niveles del ajuste de parámetros para NSGA-II.	75
5.3. Mejores configuraciones obtenidas por pruebas no paramétricas para NSGA-II.	76
A.1. Tiempo de cómputo promedio utilizado por AUGMECON2 y Suma ponderada y cardinalidad de los frentes obtenidos para instancias de 10 clientes.	89
A.2. Tiempos de computo utilizados por AUGMECON2 para las formulaciones basadas en distancia y latencia en instancias de 10 clientes	92

Resumen

Eduardo Valdés García.

Candidato para el grado de Maestría en Ciencias en Ingeniería
con especialidad en Ingeniería de Sistemas.

Universidad Autónoma de Nuevo León.

Facultad de Ingeniería Mecánica y Eléctrica.

Título del estudio:

PROBLEMA BIOBJETIVO DEL AGENTE VIAJERO CON MÚLTIPLES VIAJES

Número de páginas: 222.

Objetivos y método de estudio: En este trabajo se estudia un problema con potenciales aplicaciones prácticas. Se dispone de un conjunto de clientes que demandan un producto; la distancia entre cada par de ellos, así como el tiempo que demora su atención también es conocida. Se cuenta con un depósito o centro de distribución y un vehículo repartidor de capacidad limitada, con la capacidad de regresar a recargar al depósito cuando sea necesario. El objetivo es determinar el camino a seguir para que el vehículo visite a todos los clientes y determine un buen compromiso entre la distancia total recorrida y el tiempo promedio de espera de los clientes. En otras palabras, la ruta que minimice los costos de transportación y maximice el nivel de servicio de los clientes.

Se proponen formulaciones matemáticas para el problema y algoritmos metaheurísticos de solución.

Contribuciones y conclusiones: Tanto las formulaciones, las soluciones referencia calculadas y los algoritmos propuestos, son considerados contribuciones. Un problema con estas características nunca ha sido abordado de acuerdo a la revisión literaria presentada.

Firma del asesor: _____

Dra. Ada Margarita Álvarez Socarrás

Nomenclatura

C	matriz de tiempos de traslado
n	número total de clientes
R	cota superior para el número de viajes necesarios
c_{ij}	tiempo de traslado entre el cliente i y el cliente j
s_i	tiempo de servicio del i -ésimo cliente
d_i	demanda del i -ésimo cliente
l_i	latencia del i -ésimo cliente
r_i	posición del i -ésimo cliente en la ruta
D^I	longitud del I -ésimo viaje
C^I	costo total del I -ésimo viaje (incluyendo tiempos de traslado y servicio)
S^I	suma de los tiempos de servicio de los clientes del I -ésimo viaje
L^I	latencia del I -ésimo viaje (calculada como si el depósito fué un cliente)
$ \cdot $	número de clientes de un viaje

Capítulo 1

Introducción

Contenidos

1.	Descripción del problema	2
2.	Hipótesis	4
3.	Justificación del estudio	4
4.	Objetivos de la tesis	4
5.	Estructura de la tesis	5

1. Descripción del problema

El problema del agente viajero [3], (TSP por sus siglas en inglés), consiste en determinar una ruta para que un turista visite un conjunto de ciudades de su interés, partiendo y regresando de su ciudad de origen. El objetivo es que el turista conozca todas las ciudades, visitándolas sólo una vez, y pierda el menor tiempo en trasladarse.

Una aplicación inmediata del TSP es determinar la ruta mas corta para que un vehículo repartidor visite a un conjunto de clientes y entregue mercancía, partiendo y regresando de un punto inicial el cuál puede ser visto como un depósito al que se regresa al final del día. Sin embargo; al considerar que cada uno de estos clientes tiene una requisición diferente de mercancía, es natural pensar que el vehículo puede no ser capaz de transportar la cantidad de mercancía necesaria para satisfacer la demanda de todos los clientes pues debe tener una capacidad de carga limitada. Considerar hacer múltiples viajes con cada vehículo, es una situación factible la mayoría de las veces pues es la capacidad y no el horario de trabajo lo que limita la entrega de mercancías.

En investigación de operaciones, el problema que representa esta situación es una extensión del TSP conocido como Problema de Ruteo de Vehículos con Múltiples Viajes ó MVRP (Multi-Trip Vehicle Routing Problem); este problema fue abordado en un principio por Fleischmann[4] en 1990. Sin embargo, el problema específico que nos atañe (para un sólo vehículo), es conocido como problema del camión repartidor, abordado por Dantzing y Ramser en el año de 1959[5].

En el problema anterior se busca exclusivamente determinar la ruta mas corta para visitar a todos los clientes o ciudades; pero este objetivo no siempre es lo mas importante. Analicemos el caso de una emergencia en la que se dispone de un sólo vehículo para visitar y dar primeros auxilios a las personas afectadas en un desastre natural. Por las condiciones geográficas, solo es posible hacer llegar los alimentos y materiales de curación a un único punto de acopio, del cual se parte y se retorna al final del día. Aunque en esencia el problema es similar al TSP, podemos apreciar que ya no es la ruta mas corta la que importa, sino la ruta que minimiza el tiempo promedio de espera de los damnificados para recibir ayuda, conocido como latencia. [6] Puede parecer que ambos objetivos son el mismo, pero puesto que lo que importa ahora es el tiempo del recorrido, hay que considerar además del tiempo de traslado el tiempo que dura el equipo en dar la atención a cada persona. Este problema ha sido abordado como problema de ruteo de un sólo vehículo con múltiples viajes centrado en el cliente

Ya en contexto podemos formalizar el problema de estudio, consideremos un solo agente/vehículo el cual visitará a un conjunto de clientes, con la capacidad de hacer múltiples viajes durante el día, se desea encontrar la ruta que sea simultáneamente, la mas corta y la que haga que la suma de las latencias de cada cliente sea la menor. Este es un problema de del agente viajero con múltiples viajes bajo los objetivos de costo y latencia. Hasta el momento, no existe un estudio para este problema, aunque si para los problemas estándar por separado. Ambas versiones de cada objetivo, el Problema del agente Viajero y el Problema del Reparador[2, 7] (MLP, por sus siglas en inglés), son considerados como problemas de optimización combinatorios \mathcal{NP} -completos. Este trabajo se dedica a la búsqueda de soluciones de un problema biobjetivo del agente viajero con múltiples viajes y al desarrollo de formulaciones matemáticas adecuadas para su representación.

2. Hipótesis

Desarrollar una formulación adecuada para representar el problema biobjetivo del agente viajero con multiples viajes, así como un algoritmo que proporcione una buena aproximación al frente de Pareto como solución al problema.

3. Justificación del estudio

Este trabajo constituye la primer investigación realizada sobre un problema del agente viajero que considere múltiples viajes y optimice simultáneamente los objetivos de distancia y latencia.

El problema propuesto resulta de interés no sólo desde el punto de vista académico. En la práctica, el ruteo de un vehículo con la posibilidad de hacer múltiples viajes para recargar mercancía resulta en una situación de mayor realismo y aplicabilidad. Además, los objetivos considerados reflejan el punto de vista tanto de la empresa como del cliente; permitiendo encontrar soluciones que representen un buen compromiso entre la ganancia de la empresa y el nivel de servicio proporcionado.

4. Objetivos de la tesis

El objetivo principal de este trabajo es desarrollar un algoritmo que proporcione soluciones al problema de estudio en un tiempo de computo razonable. Para lograrlo, se proponen los siguientes objetivos secundarios:

- Revisión bibliográfica de los problemas de cada objetivo por separado.
- Desarrollo de una formulación matemática adecuada al problema. Se plantea un modelo basado en cada objetivo.
- Construcción de un repositorio de soluciones referencia para instancias pequeñas.
- Desarrollo e implementación computacional de una metodología de solución. Se proponen un algoritmo genético NSGA-II y un procedimiento GRASP hibridizado con el método exacto AUGMECON2.

5. Estructura de la tesis

Este trabajo se estructura de forma siguiente:

El capítulo uno incluye una breve introducción y descripción del problema.

En el capítulo dos se describen los problemas asociados a cada objetivo por separado; esto es, el problema del agente viajero y el problema de mínima latencia. Se incluye la revisión de las investigaciones desarrolladas para ambos problemas, en el caso de permitir múltiples viajes para el vehículo. Se describen algunos enfoques biobjetivo y se introduce la teoría multiobjetivo necesaria para el entendimiento de los procedimientos utilizados como metodologías de solución.

En el capítulo tres, se desarrollan las formulaciones matemáticas del problema; una basada en el objetivo de latencia y otra en distancia o costo.

El capítulo cuatro aborda los diferentes métodos de solución utilizados. Se propone la utilización de dos escalarizaciones para determinar un frente de manera exacta; éstas son el método de la suma ponderada y AUGMECON2. Además, se describen dos procedimientos metaheurísticos como alternativa de solución para instancias de muchos clientes: un algoritmo genético NSGA-II y un procedimiento GRASP hibridizado con AUGMECON2.

El quinto capítulo incluye las inferencias hechas a partir de la experimentación computacional. Se evalúa la eficacia de los métodos exactos propuestos, de las formulaciones propuestas y de los algoritmos heurísticos.

Por último, el capítulo seis presenta las conclusiones y trabajo futuro.

Capítulo 2

Marco Teórico

Contenidos

1.	El Problema del Agente Viajero	7
2.	El Problema de Mínima Latencia	9
3.	Problema del Agente Viajero con Múltiples Viajes	12
4.	Problema de Mínima Latencia con Múltiples Viajes	14
5.	Enfoques Biobjetivo	18
6.	Optimización Multiobjetivo	18
6.1.	Nociones básicas	18
6.2.	Cotas del conjunto no dominado	22
6.3.	Métodos multiobjetivo de solución	24

En el problema de estudio se conjugan, en esencia, dos problemas importantes de la optimización combinatoria: el problema de agente viajero y el problema de mínima latencia; pero considerando en ambos adicionalmente, una capacidad limitada del vehículo y la posibilidad de hacer múltiples viajes para poder visitar a todos los clientes. Buscar la ruta¹ a seguir que minimice a la vez la distancia recorrida y el tiempo promedio de espera de los clientes, responde a la perspectiva tanto de la empresa repartidora como de los clientes. Un enfoque con estas características no ha sido estudiado hasta el momento; sin embargo existen numerosas publicaciones de cada problema en particular, así como de otros enfoques biobjetivo.

¹El término *ruta* hace referencia a una solución de nuestro problema; es decir, el conjunto de viajes que sigue el vehículo para visitar a todos los clientes, regresando al depósito cada vez que sea necesario

En este capítulo se presentan las definiciones e información necesarias para comprender el objeto de estudio. En la primer sección, se encuentra una revisión del problema del agente viajero. La segunda aborda los conceptos básicos del problema de mínima latencia. La tercer y cuarta sección muestran las extensiones, con un vehículo capacitado y múltiples rutas, de ambos problemas, respectivamente. Enseguida, una muestra de los enfoques biobjetivo estudiados hasta el momento. Finalmente, aparecen los conceptos fundamentales de optimización con múltiples objetivos.

1. El Problema del Agente Viajero

El origen de este problema es incierto. Parte de su definición parece haber sido tratada por muchos años como un reto para los matemáticos conocido como “*The Hamilton Game*” [8]. Apareció publicado por primera vez en el año de 1953 por M. Flood[9] y posteriormente por H. Kuhn[10], en la búsqueda de rutas escolares óptimas, ambos afirmando haber escuchado hablar de este problema en una conferencia de Hassler Whitney en Princeton en el año de 1934 quien al parecer nunca hizo referencia escrita al problema. [11]

El problema del agente viajero (TSP, por sus siglas en inglés), consiste en determinar una ruta para que un turista visite un conjunto de ciudades de su interés, partiendo y regresando a su ciudad de origen. El objetivo es que el turista conozca todas las ciudades, visitándolas sólo una vez, y pierda el menor tiempo en trasladarse. Formalmente, dado un grafo $G = (V, A)$ donde V es el conjunto de vértices y A el conjunto de aristas. $C = (c_{ij})$ es una matriz de distancias(o costos) asociada, donde c_{ij} representa la distancia que existe entre los vértices i y j . El Problema del agente Viajero consiste en encontrar un ciclo Hamiltoniano de distancia mínima en G [12].

Se han realizado numerosos trabajos [12–14] y formulaciones [15, 16] de este problema. La formulación presentada a continuación es una desarrollada por Dantzing Fulkerson y Johnson en 1954 [11] con una modificación en las restricciones de eliminación de sub-tours presentada por Miller Tucker y Zemlin en 1960 [16]. Sean

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{si el arco que va de la ciudad } i \text{ a la } j \text{ es utilizado} \\ 0, & \text{en caso contrario} \end{cases}, \quad i, j = 1 : n$$

y

u_i : etiqueta o posición del i -ésimo cliente en la ruta;

el modelo para el problema del agente viajero es el siguiente

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} \\ \text{s.a:} \quad & \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^n x_{ij} = 1 \quad j = 1 : n \end{aligned} \quad (2.1)$$

$$\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n x_{ij} = 1 \quad i = 1 : n \quad (2.2)$$

$$u_i - u_j + (n - 1)x_{ij} \leq n - 2 \quad i, j = 2 : n, i \neq j \quad (2.3)$$

$$1 \leq u_i \leq n - 1 \quad i = 1 : n \quad (2.4)$$

$$x_{ij} \in \{0, 1\}$$

Las ecuaciones (2.1) y (2.2) garantizan que el agente sale y llega exactamente una vez a cada ciudad. Las restantes son conocidas como restricciones de eliminación de subtours. Básicamente, cuando el arco (i, j) no se encuentra en la solución, (2.4) hace que (2.3) sea redundante; en caso contrario, (2.3) obliga a que $u_j \geq u_i + 1$ evitando los subtours. La idea tras la restricción es etiquetar los nodos en forma creciente conforme al transcurso del tour; si existe un subtour, entonces el nodo donde inicia y termina contradice la restricción pues solo el nodo 1 es exceptuado de cumplir la condición.

Pareciera posible examinar exhaustivamente todas las rutas para encontrar la de menor costo; sin embargo, existen $\frac{(n-1)}{2}!$ rutas diferentes, siendo n el número de vértices, por lo que resulta inútil la fuerza bruta en problemas reales, haciendo aplicable el uso de procedimientos heurísticos de solución. Como puede apreciarse, bajo este planteamiento tan simple, se esconde uno de los problemas mas estudiados e importantes en optimización debido a su “*compleja simplicidad*” y a sus numerosas aplicaciones, tales como: creación de rutas escolares[9], reparto de bienes y servicios, turismo [17], análisis de la estructura de cristales [18], agrupamiento de datos [19], entre otros.

2. El Problema de Mínima Latencia

El Problema de Mínima Latencia (MLP por sus siglas en inglés) también conocido como *problema del reparador o del repartidor* fue estudiado por primera vez por Afrati et al en 1986[6]. Se define como: dado un vehículo situado en un depósito, un conjunto de clientes y los tiempos de traslado entre cada par de clientes; determinar la ruta a seguir de forma que, visitando a cada cliente exactamente una vez, se minimice el tiempo total que los clientes esperan a ser atendidos. Un problema muy similar al del agente viajero pero visto desde la perspectiva de lo que desean los clientes y no la empresa repartidora en este caso. Puede parecer que encontrando la ruta mas corta, se encuentra también la que hace que los clientes esperen lo menos posible; sin embargo, es fácil mostrar que no es cierto. Note que no solamente está en juego la distancia para calcular el tiempo de espera, sino también el tiempo que demora el vehículo en atender al cliente, mejor conocido como tiempo de servicio. La Figura 2.1 muestra un ejemplo en el que, aún sin considerar los tiempos de servicio, la ruta mas corta no genera el menor tiempo de espera de todos los clientes y viceversa.

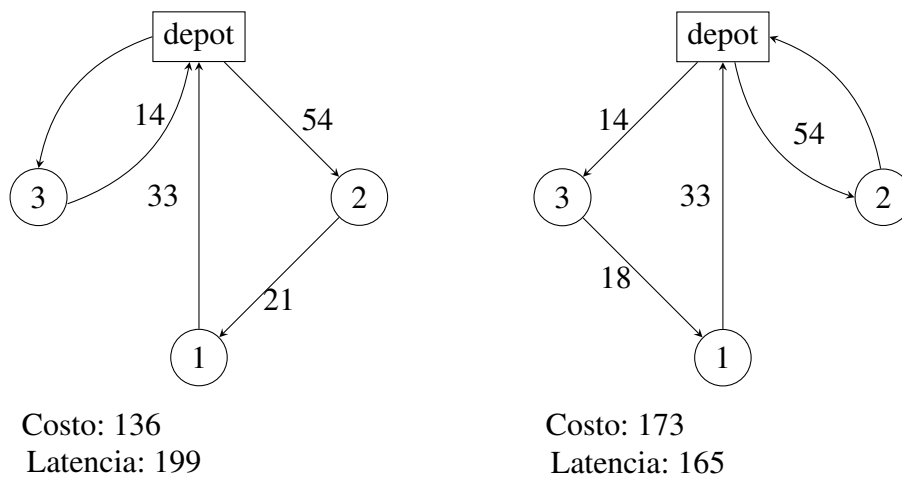


Figura 2.1. Costo vs Latencia

Formalmente, dado un grafo completo $G = (V, A)$ con vértices $V = \{0, 1, 2, \dots, n\}$ y A como conjunto de aristas; el vértice 0 interpretado como el depósito, una matriz $C = (c_{ij})$ de costos asociados a los arcos y un tiempo de servicio s_i asociado a cada cliente. El problema de mínima latencia consiste en encontrar el camino hamiltoniano de latencia total mínima; entendiendo por latencia el tiempo de espera de los clientes.

Debido al enfoque del MLP sobre los sistemas de servicios, existen múltiples aplicaciones entre las que destacan: atención de desastres[20, 21], problemas de secuenciación de tareas [22], entregas de productos y servicios; entre otras.

Se han desarrollado múltiples formulaciones para este problema, destacando las propuestas por Mendéz-Díaz et al [23] y la de Sarubbi[24] quien utilizó la red multinivel propuesta por Picard and Queyrane para un problema del agente viajero dependiente del tiempo [25]. Posteriormente Angel-Bello et al [1] propusieron dos modelaciones que presentan un mejor desempeño que los modelos anteriores haciendo uso de una red multinivel (ver Figura 2.2). A continuación se presenta uno de éstos últimos con el fin de ejemplificar las ideas que se utilizarán en nuestra formulación.

Considere una permutación de los nodos $P = 0[1][2] \cdots [n]$, donde $[i]$ denota al índice correspondiente al nodo en la i -ésima posición en la ruta. Gráficamente, esta permutación puede ser vista en la red multinivel como un camino que inicia en el depósito, o nodo 0; inmediatamente después sigue al nodo $[1]$ en el primer nivel y así sucesivamente hasta llegar al nodo $[n]$ en el último nivel.

La latencia del i -ésimo nodo se define como el tiempo que ha transcurrido desde que el vehículo parte del depósito hasta que i es visitado(no servido); a saber,

$$l_i = \sum_{j=1}^i s_{[j-1]} + c_{[j-1][j]} \quad (2.5)$$

Así, la latencia total es la suma de las latencias individuales de todos los clientes.

$$L = \sum_{i=1}^n l_{[i]} = \sum_{i=1}^n (n - i + 1) (s_{[i-1]} + c_{[i-1][i]}). \quad (2.6)$$

Observe que el tiempo que tarda el vehículo en ir a j inmediatamente después de i , aparece en la latencia total un número de veces proporcional a su posición en la ruta; pues éste puede verse como la cantidad de clientes, adelante en la permutación, que deben esperar a que se vaya del nodo i al j para que se les visite. En latencia, el arco que va del último cliente al depósito es prescindible pues es el tiempo de espera de los clientes y no del depósito lo que interesa.

Sean las variables de decisión

$$x_i^k = \begin{cases} 1, & \text{si el nodo } i \text{ está en el nivel } k \\ 0, & \text{en caso contrario} \end{cases} \quad (2.7)$$

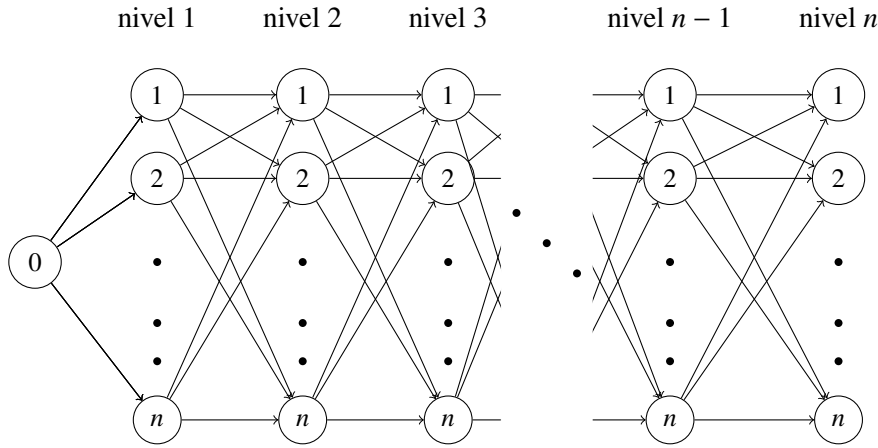


Figura 2.2. Red multinivel para MLP[1]

$$y_{ij}^k = \begin{cases} 1, & \text{si el nodo } i \text{ está en el } k \text{ y el nodo } j \text{ en el nivel } k + 1 \\ 0, & \text{en caso contrario} \end{cases} \quad (2.8)$$

el modelo planteado es el siguiente

$$\min \quad n \sum_{i=1}^n c_0 i x_i^1 + \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{i=1}^n \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n (n-k) c_{ij} y_{ij}^k \quad (2.9)$$

$$\text{s.a:} \quad \sum_{k=1}^n x_i^k = 1 \quad i = 1 : n \quad (2.10)$$

$$\sum_{i=1}^n x_i^k = 1 \quad k = 1 : n \quad (2.11)$$

$$\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n y_{ij}^k = x_i^k \quad i = 1 : n, k = 1 : n-1 \quad (2.12)$$

$$\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n y_{ji}^k = x_i^{k+1} \quad i = 1 : n, k = 1 : n-1 \quad (2.13)$$

$$x_i^k \in \{0, 1\} \quad i = 1 : n, k = 1 : n \quad (2.7)$$

$$y_{ij}^k \geq 0 \quad i = 1 : n, j = 1 : n, j \neq i, k = 1 : n-1 \quad (2.8)$$

Las restricciones (2.10) y (2.11) aseguran que un nodo ocupe solo un nivel y que cada nivel este ocupado por un solo nodo; respectivamente. De cada nivel parte y llega únicamente un arco desde y hacia los nodos activos, esto es asegurado por (2.12) y (2.13), respectivamente.

3. Problema del Agente Viajero con Múltiples Viajes

La primer referencia a este problema data de la década de los 50, llamado problema del camión repartidor [5]; sin embargo, esta vía específica de estudio se vio opacada al convertirse en una particularidad del problema de ruteo de vehículos con múltiples viajes² (MTVRP, por sus siglas en inglés) estudiada por primera ocasión por Fleischamn [4]. Para fines de este estudio, lo llamaremos: “*Problema del agente viajero con múltiples viajes*”.

En la mayoría de las aplicaciones del TSP puede no ser posible visitar a todos los clientes pues el vehículo tiene una capacidad limitada de carga. Bajo este razonamiento surgen algunas de las extensiones del problema del agente viajero: la primer idea es pensar en la necesidad de utilizar mas vehículos y enviar a cada uno con un grupo de clientes. Sin embargo, en un día laboral, el conductor puede regresar al depósito a recargar tantas veces sea necesario y visitar a todos los clientes haciendo varios *viajes*; entendiendo por viaje una secuencia de visita a algunos clientes que inicia y termina en el depósito. Dantzing y Tyagi proponen algoritmos que construyen soluciones a éste último enfoque [5, 26]; Azi et al propone un algoritmo exacto de solución al problema utilizando generación de columnas [27] y branch&price[28, 29] para minimizar la distancia total de la ruta bajo restricciones de ventanas de tiempo; además, desarrollan una formulación que sirve de base para nuestra modelación basada en costo. A pesar de la importancia y posibles aplicaciones que tiene, este enfoque no ha recibido tanta atención como la primer idea, conocida en investigación de operaciones como Problema de Ruteo de Vehículos[30] (VRP, por sus siglas en inglés).

De manera formal, el problema es descrito como sigue. Dado un vehículo con capacidad de carga Q que entrega productos a un conjunto de clientes, nodos de un grafo $G = (V, A)$ con $V = \{1, 2, \dots, n\}$. Sea $C = (c_{ij})$ la matriz de distancias asociadas entre cada par de clientes $(i, j) \in A$. Cada cliente $i \in V$ es caracterizado por una demanda d_i y un tiempo de servicio s_i . Durante el día, el vehículo debe hacer R viajes que inician en el depósito o nodo 0 y terminan en una copia del mismo, el nodo $n + 1$ del grafo; ambos con

²También llamado problema de ruteo con múltiple uso de los vehículos

demanda, tiempo de servicio y distancia de traslado entre ellos con valor cero. El objetivo es minimizar la distancia total de la ruta sin sobrepasar la capacidad del vehículo en cada viaje.

A continuación presentamos la formulación desarrollada por Azi et al[27], la cuál servirá de base a la modelación basada en costo que presentamos en el Capítulo 3. Este modelo considera ventanas de tiempo $[a_i, b_i]$ asociadas con cada cliente $i \in V$, donde a_i y b_i son el tiempo mas temprano y mas tarde en que se puede visitar al cliente. Un tiempo de carga del vehículo σ^r asociado a cada ruta y un tiempo máximo permitido de duración de las rutas t_{\max} . El problema fue formulado de la siguiente forma, utilizando una constante M suficientemente grande y un parámetro β . Las variables y_i^r indican si el cliente i está en la ruta r ; tomando valor 1 en caso afirmativo y 0 en caso contrario. x_{ij}^r representando los arcos, iguales a 1 si el arco (i, j) está en la ruta r y 0 en caso contrario. El tiempo de inicio del servicio al cliente i en la ruta r es representado por t_i^r y se usan t_0^r y t_{n+1}^r para indicar el tiempo de inicio y terminación de cada ruta.

$$\min \quad \sum_{r=1}^R \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij}^r \quad (3.28)$$

$$\text{s.a:} \quad \sum_{r=1}^R y_i^r = 1, \quad i = 1 : n. \quad (2.14)$$

$$\sum_{j=0}^{n+1} x_{ij}^r = y_i^r \quad i = 1 : n, r = 1 : R. \quad (2.15)$$

$$\sum_{i=0}^{n+1} x_{ih}^r = \sum_{j=0}^{n+1} x_{hj}^r, \quad h = 1 : n, r = 1 : R. \quad (2.16)$$

$$\sum_{j=0}^{n+1} x_{0j}^r = 1, \quad r = 1 : R, \quad (2.17)$$

$$\sum_{i=0}^{n+1} x_{i,n+1}^r = 1, \quad r = 1 : R. \quad (2.18)$$

$$\sum_{i=1}^n d_i y_i^r \leq Q \quad r = 1 : R \quad (2.19)$$

$$t_i^r + s_i + c_{ij} - M(1 - x_{ij}^r) \leq t_j^r, \quad i, j = 0 : n + 1, r = 1 : R \quad (2.20)$$

$$a_i y_i^r \leq t_i^r \leq b_i y_i^r, \quad i = 1 : n, r = 1 : R \quad (2.21)$$

$$t_0^1 \geq \sigma^1 \quad (2.22)$$

$$t_{n+1}^r + \sigma^{r+1} \leq t_0^{r+1}, \quad r = 1 : R - 1 \quad (2.23)$$

$$\sigma^r = \beta \sum_{i=1}^n s_i y_i^r, \quad r = 1 : R \quad (2.24)$$

$$t_i^r \leq t_0^r + t_{\max}, \quad i = 1 : n, r = 1 : R \quad (2.25)$$

$$x_{ij}^r \in \{0, 1\}; \quad i, j = 0 : n + 1, r = 1 : R \quad (2.26)$$

$$y_i^r \in \{0, 1\}; \quad i = 1 : n, r = 1 : R \quad (2.27)$$

$$t_i^r \geq 0, \quad i = 0 : n + 1, r = 1 : R \quad (2.28)$$

La idea de esta formulación es considerar cada viaje como un conjunto de clientes; mirando cada viaje por separado, puede formularse dentro de él un TSP con sus miembros. La restricción (3.18) asegura la cobertura del conjunto de clientes en los R viajes diferentes (algunos de éstos pueden ser vacíos). (2.14-2.18) tratan a los miembros de cada viaje como clientes de un problema del agente viajero. La restricción de mochila (2.19) asegura que en ningún viaje se exceda la capacidad del vehículo. Todas estas restricciones serán aplicadas de igual forma en nuestro modelo basado en costo pues reflejan la estructura del problema.

Las restantes sirven al modelo para eliminar la posibilidad de subtours y hacer que se respeten las ventanas de tiempo. La variable t_i^r guarda el tiempo transcurrido desde que se inició la ruta hasta que se llega al cliente i en el viaje r . Note que en nuestro problema no se necesita atender al cliente en una ventana de tiempo, la latencia puede ser fácilmente calculada siguiendo esta idea pues t_i^r es el tiempo de espera del i -ésimo cliente. Así, las restricciones (2.20) y (2.23) serán modificadas para calcular la latencia en nuestra formulación.

4. Problema de Mínima Latencia con Múltiples Viajes

Considere un vehículo y un conjunto de clientes a los cuáles se debe visitar para hacer una reparación o entregar mercancía. Como la capacidad de carga de nuestro vehiculo es limitada, le es permitido regresar a recargar al depósito cuantas veces sea necesario. Esta posibilidad permitirá aprovechar todo el tiempo disponible de trabajo del conductor y con ello poder visitar a todos los clientes. Conociendo los tiempos de traslado entre cada par de clientes y el tiempo que se tarda en servir a cada uno, se desea determinar la secuencia

de visita y recargas de mercancía que minimiza el tiempo que esperan en promedio los clientes.

A pesar de su importancia práctica, este problema ha recibido muy poca atención en la literatura. La primer referencia fue en el año 2013 por Angel-Bello et al [7] quiénes estudio se desarrollan y comparan dos formulaciones para el problema. La segunda y última, Martínez et al [2] generalizan las dos formulaciones desarrolladas y emplean una metaheurística GRASP para obtener soluciones de calidad.

El problema de mínima latencia con múltiples viajes es descrito como sigue. Dado un vehículo con capacidad de carga Q , la posibilidad de regresar a recargar al deposito inicial y un tiempo máximo de servicio D^3 . Un conjunto de n clientes que deben ser visitados exactamente una vez por el vehículo; cada uno caracterizado por una demanda d_i , un tiempo de servicio s_i y el tiempo que se tarda el vehículo en trasladarse hacia cualquier otro cliente t_{ij} . Se desea determinar la ruta, o secuencia de visita y recargas, que no sobrepase la capacidad del vehículo en cada viaje ni el tiempo máximo de servicio y que minimice el tiempo promedio que los clientes esperan a ser atendidos.

Las formulaciones desarrolladas se basan en la red multinivel de Picard y Queyranne[25]; enseguida presentamos una que aparece en el trabajo de Martinez et al [2]. Definimos un grafo dirigido $G = (V, A)$. El conjunto de nodos $V = \{0, 1, \dots, n, n+1, \dots, N\}$, donde 0 representa el depósito, los nodos $1, 2, \dots, n$ los clientes y los nodos $n+1, \dots, N$ copias del depósito; decimos que hay $N - n = n$ copias del depósito, representando una cota superior al número de viajes necesario. Cada arco $(i, j) \in A$ tiene asociado un *costo de traslado* $c_{ij} = s_i + t_{ij}$ equivalente al tiempo de servir (y poder dejar) al i -ésimo cliente mas el tiempo de traslado para llegar con el cliente j . Los costos asociados a los arcos que van desde, hacia o entre las copias de los depósitos tienen como costo de traslado c_{0i} , c_{i0} y 0, respectivamente para $i = 1 : n$. Además, cada depósito (original y copias), tiene demanda y tiempo de servicio con valor 0.

Una solución factible es una permutación de los nodos de V , iniciando en 0, en la que la suma de las demandas de los clientes entre cualesquier par de depósitos no sobrepasa la capacidad del vehículo. Gráficamente puede ser representada como un ciclo hamiltoniano en la red multinivel de la Figura 2.3. Para establecer la formulación, se utilizan las varia-

³Interpretado como la duración del periodo laboral del conductor del vehículo.

bles w^k como la demanda acumulada hasta la posición (nivel) k contada desde el último depósito visitado, x_i^k representa si el nodo i está en la posición k y y_{ij}^k si el nodo i es activo en el nivel k y j en el nivel $k + 1$ en la permutación.

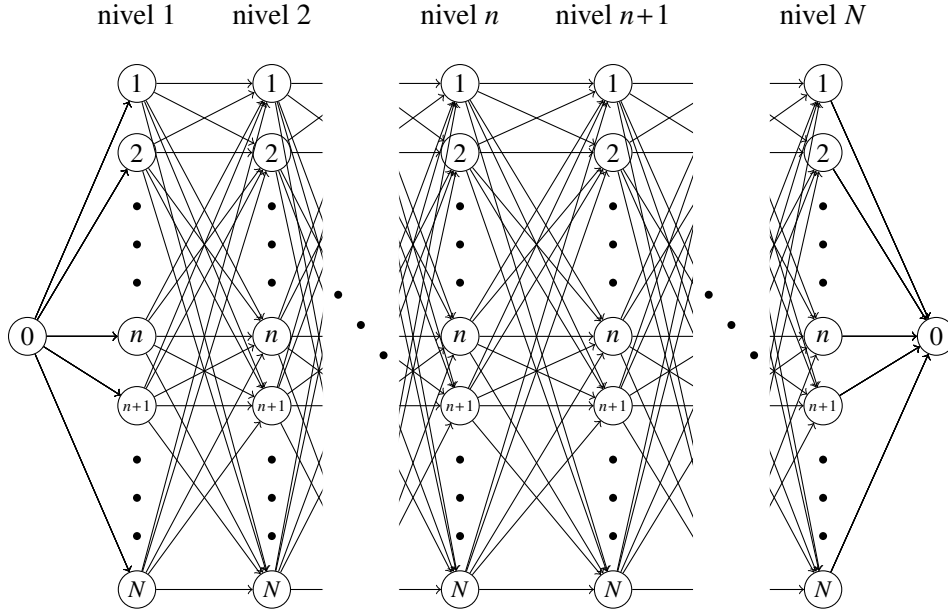


Figura 2.3. Red multinivel para MLP con múltiples viajes[2]

$$\min \quad N \sum_{i=1}^n c_{0i} x_i^1 + \sum_{i=1}^N \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N c_{ij} \sum_{k=1}^{N-1} (N-k) y_{ij}^k \quad (2.29)$$

$$\text{s.a:} \quad \sum_{k=1}^N x_i^k = 1, \quad i = 1 : N \quad (2.30)$$

$$\sum_{i=1}^N x_i^k = 1, \quad k = 1 : N \quad (2.31)$$

$$\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N y_{ij}^k = x_i^k, \quad i = 1 : N; k = 1 : N-1 \quad (2.32)$$

$$\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N y_{ji}^k = x_i^{k+1}, \quad i = 1 : N; k = 1 : N-1 \quad (2.33)$$

$$\sum_{i=1}^N c_{0i} x_i^1 + \sum_{i=1}^N \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N c_{ij} \sum_{k=1}^{N-1} y_{ij}^k + \sum_{i=1}^N c_{i0} x_i^N \leq D \quad (2.34)$$

$$w^1 = \sum_{i=1}^n d_i x_i^1 \quad (2.35)$$

$$w^{k+1} \geq w^k + \sum_{i=1}^N d_i x_i^{k+1} + Q \left(\sum_{i=1}^N x_i^{k+1} - 1 \right), \quad k = 1 : N - 1 \quad (2.36)$$

$$w^{k+1} \leq Q \sum_{i=1}^N x_i^{k+1}, \quad k = 1 : N - 1 \quad (2.37)$$

$$x_i^k \in 0, 1, \quad i, k = 1 : N \quad (2.38)$$

$$y_{ij}^k \geq 0, \quad i, j = 1 : N, \quad j \neq i, \quad k = 1 : N - 1 \quad (2.39)$$

$$w^k \geq 0, \quad k = 1 : N \quad (2.40)$$

Las restricciones (2.31) y (2.30) aseguran que cada cliente se encuentre activo en exactamente un nivel y que hay un solo cliente por nivel, respectivamente. Un arco puede salir y llegar exclusivamente a un cliente activo, (2.32) y (2.33). La restricción (2.34) asegura que se respete el tiempo laboral del conductor. Las restricciones (2.35-2.37) calculan la demanda acumulada de cada nivel y aseguran que entre cada par de depósitos, la suma de las demandas no sobrepase la capacidad del vehículo. Finalmente, (2.38-2.40) indican la naturaleza de las variables.

La contribución de un arco es proporcional al nivel en que inicie; a saber, el costo del arco que conecta el nivel k con el $k + 1$ aparece $N - k$ veces en la función objetivo. Note que al considerar como clientes a las copias del depósito se añade, en la función objetivo, el tiempo que éstos esperan a que el vehículo los visite. Calcular la latencia total de este modo proporciona una rápida evaluación de la función objetivo y evitar el uso de variables y restricciones auxiliares para calcularla.

En nuestra formulación, esta cualidad se pierde pues consideramos como latencia la suma de los tiempos de espera de los clientes y excluimos el tiempo que el depósito espera cada vez a que el vehículo regrese a recargar. Lo que puede parecer una sutileza provoca, como puede apreciarse en el siguiente capítulo, un cambio completo en el enfoque para utilizar la red multinivel. La Figura 2.4 ejemplifica la misma solución para cada enfoque (considerando o no el tiempo de espera del depósito); en otras palabras muestra la latencia de la misma ruta para Martínez et al [2] y para nosotros. Obviamente, una solución es factible para ambos enfoques pero tienen valores objetivo diferentes.

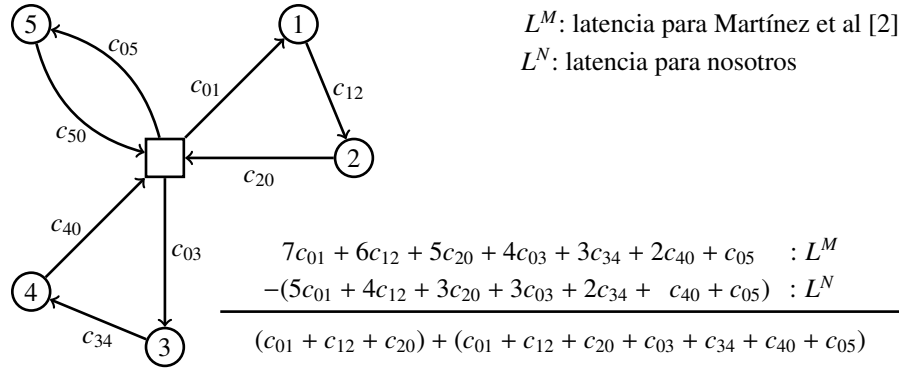


Figura 2.4. Diferencia entre los dos enfoques de latencia

5. Enfoques Biobjetivo

Hasta el momento, no hay un estudio en la literatura que considere simultáneamente los objetivos de costo y latencia para el problema con múltiples viajes; aún para el caso general de múltiples vehículos. Sin embargo, existen diversos enfoques multiobjetivo que presentamos a continuación.

Lin y Kwok presentan un análisis de versiones multiobjetivo de recocido simulado[31] y búsqueda tabú[32] minimizando el costo total y el desbalance en la carga de trabajo para los conductores[33]. Azi et al proponen un algoritmo exacto para minimizar la distancia total de la ruta y maximizar el número de clientes servidos, ponderizando en una suma ambos objetivos [27]; los mismos autores proponen un algoritmo branch&price para maximizar el ingreso y minimizar la distancia total de la ruta en una suma ponderada[28]. Derigs et al aplican una metaheurística VNS[34] en un problema real optimizando jerárquicamente el número de vehículos requeridos y la distancia de la ruta[35]. Azi et al proponen una metaheurística ALNS para optimizar jerárquicamente el número de clientes servidos y la distancia total recorrida [36].

6. Optimización Multiobjetivo

6.1. Nociones básicas

Gran parte de los problemas de la vida real implican la optimización de múltiples objetivos simultáneos que por lo general contrastan entre ellos; es decir, la mejora de uno

implica el deterioro de otro. Estos problemas son tan comunes que están presentes en gran parte de las actividades que realizamos diariamente, en los problemas industriales actuales y en la investigación de operaciones contemporánea. En el año de 1906 Vilfredo Pareto introdujo, en el contexto de economía, el concepto de soluciones no inferiores, conocidas actualmente como soluciones no dominadas [37]. Fue un poco más de un lustro después que muchas áreas de la ingeniería comenzaron a adoptar sus ideas y a aplicarlas.

Formalmente, en un problema de optimización multiobjetivo se desean optimizar simultáneamente p funciones objetivo sujetas a ciertas restricciones, todas funciones de n variables; puede ser expresado de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \text{"optimizar"} \quad & f(\mathbf{x}) = (f_1, f_2, \dots, f_p)(\mathbf{x}) \\ \text{s.a:} \quad & g(\mathbf{x}) = (g_1, g_2, \dots, g_m)(\mathbf{x}) \geq 0 \\ & h(\mathbf{x}) = (h_1, h_2, \dots, h_k)(\mathbf{x}) = 0 \end{aligned} \tag{2.41}$$

donde $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ representa el vector decisión. Optimizar, dependiendo del problema puede significar maximizar o minimizar para algunos objetivos. Por conveniencia de aquí en adelante haremos referencia a la minimización de todas las funciones objetivo, recordando que puede transformarse el sentido de un objetivo si es necesario.

El conjunto $\mathcal{X} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid g(\mathbf{x}) \geq 0 \wedge h(\mathbf{x}) = 0\}$, es conocido como conjunto factible y el espacio \mathbb{R}^n que lo contiene se le llama espacio de las decisiones. De igual forma \mathbb{R}^p es llamado espacio de los objetivos y $\mathcal{Y} = f(\mathcal{X}) := \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^p \mid \mathbf{y} = f(\mathbf{x}) \text{ para algún } \mathbf{x} \in \mathcal{X}\}$ es conocido como imagen del conjunto factible o conjunto factible en el espacio de los objetivos.

Los problemas con un solo objetivo tienen la bondad de que la imagen de su función objetivo es un subconjunto de \mathbb{R} , un conjunto completamente ordenado. Gracias a esto podemos determinar exactamente cuál es el óptimo de un problema, al poder comparar las evaluaciones de los puntos del dominio de la función a optimizar y determinar cual de todas es la mejor. Por el contrario, en un problema de optimización de objetivos múltiples, las evaluaciones de los puntos del dominio de todos los objetivos, ya no son elementos de \mathbb{R} , sino de \mathbb{R}^p ; el cual, para $p \geq 2$, no es un conjunto ordenado. Es decir no hay una relación de orden total definida para este conjunto.

Aunque se han establecido algunos ordenes, como el de comparar coordenada a coordenada, el comparar el elemento máximo o el orden del alfabeto, todos son ordenes parciales pues sólo pueden comparar a un subconjunto de \mathbb{R}^p . Por ejemplo, si se desea conocer que puntos son “mayores o menores” al origen de coordenadas del plano, sólo puede decirse que los puntos pertenecientes al primer cuadrante, exceptuando la intersección con los ejes, son mayores y que por el contrario los del tercer cuadrante, sin los ejes, son menores pero, ¿qué pasa con los puntos que se encuentran sobre el segundo y cuarto cuadrante y sobre los ejes? Como se aprecia, no es posible comparar estos elementos del plano (con esta relación de orden) con el origen. Note que la situación anterior es completamente distinta de lo que pasa al comparar un elemento de la recta real.

En el contexto de optimización multiobjetivo se utiliza una relación de orden denominada *dominancia*, denotada por \leq , para comparar los elementos del espacio de los objetivos. Decimos que $u \leq v$ (u domina v) sí y solo sí $u_k \leq v_k$, $k = 1 : p$ y $u \neq v$.

Así, el problema de optimización multiobjetivo consiste en hallar el vector \mathbf{x} tal que se obtenga el “mejor valor” posible de $f(\mathbf{x})$. En general, no existe un único “mejor valor”, sino un conjunto de opciones para \mathbf{x} . Entre éstas, ninguna puede considerarse mejor a las demás si se tienen en cuenta todos los objetivos al mismo tiempo. Este hecho deriva de que puede existir, y generalmente existe, conflicto entre los diferentes objetivos que componen el problema. Por ende, al tratar con problemas de optimización multiobjetivo se precisa de una nueva definición de “optimalidad”, pues no existe óptimo único, sino un conjunto: el conjunto de las *soluciones eficientes*.

Definición 2.1 (Solución eficiente) Una solución factible $\hat{\mathbf{x}}$ es llamada eficiente o Pareto óptima, si no existe $\mathbf{x} \in \mathcal{X}$ tal que $f(\mathbf{x}) \leq f(\hat{\mathbf{x}})$. Si $\hat{\mathbf{x}}$ es eficiente, $f(\hat{\mathbf{x}})$ es llamado punto no dominado. El conjunto de todas las soluciones eficientes $\hat{\mathbf{x}} \in \mathcal{X}$ se denota por \mathcal{X}_E y es llamado conjunto eficiente o Pareto-optimal. El conjunto de los puntos no dominados $\hat{\mathbf{y}} = f(\hat{\mathbf{x}}) \in \mathcal{Y}$, donde $\hat{\mathbf{x}} \in \mathcal{X}_E$, se denota por \mathcal{Y}_N y es conocido como el conjunto no dominado o frente Pareto; definido como $\mathcal{Y}_N := \{\mathbf{y} \in \mathcal{Y} \mid \nexists \mathbf{y}' \in \mathcal{Y} : \mathbf{y}' \leq \mathbf{y}\}$. En particular $\mathcal{Y}_N \subset \mathcal{Y}$.⁴

⁴Dado que la teoría de Optimización Multiobjetivo es relativamente nueva, no se ha establecido una notación oficial.

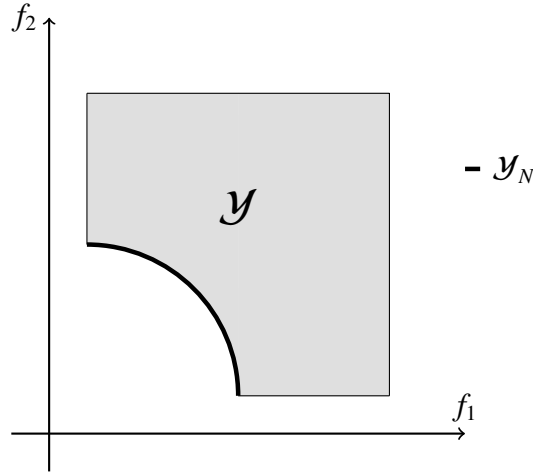


Figura 2.5. Ilustración de un frente de Pareto.

En la Figura 2.5 aparece ilustrado el conjunto de puntos que no son dominados por cualquier otro dentro del conjunto factible en el espacio de los objetivos. Note que ningún par de puntos dentro de este conjunto puede compararse entre sí, pues la mejora en uno de los objetivos implica el deterioro de otro; esta es la esencia de la optimización multiobjetivo.

Cada uno de los elementos de este conjunto cumple la idea filosófica del óptimo de programación monobjetivo: dado $\hat{x} \in X_E$, no existe solución factible $x \in X$ que sea mejor (domine) a su evaluación ($\nexists x \in X : f(x) \leq f(\hat{x})$); en otras palabras, dentro de las soluciones con las que puede compararse, \hat{x} es el que tiene la mejor evaluación.

Si relajamos la forma en que comparamos dos soluciones en el espacio de los objetivos permitiendo que uno domine al otro si ambos son iguales, el conjunto de soluciones no dominadas se amplía y contiene soluciones que son, en muchos casos, más sencillas de encontrar por los métodos de búsqueda de soluciones a este tipo de problemas, mismos que serán vistos más adelante. Estas soluciones relajadas son llamadas *débilmente eficientes*.

Definición 2.2 (Solución débilmente eficiente) Una solución factible $\hat{x} \in X$ es llamada *débilmente eficiente* o *débilmente Pareto óptima* si no existe $x \in X$ tal que $f(x) < f(\hat{x})$. El punto $\hat{y} = f(\hat{x})$ es llamado *débilmente no dominado*. El conjunto de todas las soluciones débilmente eficientes es llamado *conjunto débilmente eficiente* y denotado por X_{wE} ; su imagen, bajo $f(\cdot)$, es conocida como *conjunto de soluciones débilmente no dominadas* y denotado por Y_{wN} .

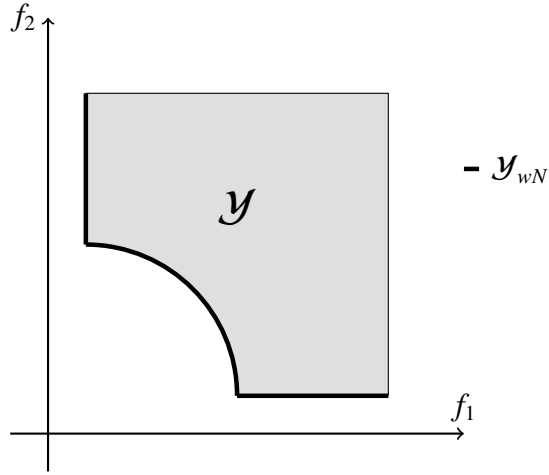


Figura 2.6. Conjunto débilmente no dominado de la Figura 2.5.

De las definiciones es inmediato que

$$\mathcal{Y}_N \subset \mathcal{Y}_{wN} \quad (2.42)$$

y

$$\mathcal{X}_E \subset \mathcal{X}_{wE}. \quad (2.43)$$

La Figura 2.6 muestra como el conjunto de soluciones débilmente no dominadas extiende al conjunto obtenido con la definición habitual en la Figura 2.5. Note que las facetas de la esquina inferior izquierda del conjunto factible en el espacio objetivo que son paralelas a los ejes son débilmente no dominadas; el resto del conjunto lo conforma \mathcal{Y}_N . El resultado de relajar la definición es que a pesar de que puede existir una solución que domina (de forma estricta) a cada elemento de éstas facetas, todos sus elementos pueden ser aceptadas como solución al problema. Basándonos en la geometría del conjunto, es natural pensar que es mas sencillo encontrar una solución débilmente no dominada que una no dominada estricta. Sin embargo, no debemos perder de vista que existe una solución (o un conjunto en un espacio de mayor dimensión) que domina a todos los elementos de una faceta en concreto, el cuál es mas deseable y se encuentra en \mathcal{Y}_N .

6.2. Cotas del conjunto no dominado

El conjunto no dominado puede ser acotado inferior y superiormente por dos puntos particulares en el espacio de los objetivos; estos elementos de \mathbb{R}^p son conocidos como puntos

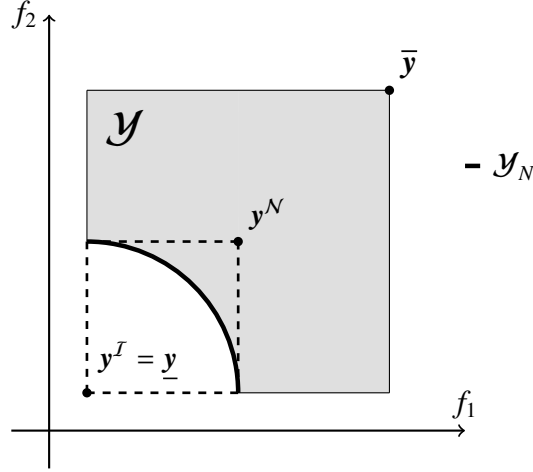


Figura 2.7. Cotas del conjunto no dominado

ideal y nadir. Estos puntos proporcionan una referencia de los valores que pueden tomar los puntos no dominados. Así, existen números reales \underline{y}_k y \bar{y}_k con $k = 1 : p$ tal que $\underline{y}_k \leq y_k \leq \bar{y}_k$ para toda $y \in \mathcal{Y}_N$. Una elección obvia sería hacer

$$\underline{y}_k = \min_{y \in \mathcal{Y}} y_k \quad y \quad \bar{y}_k = \max_{y \in \mathcal{Y}} y_k.$$

Aunque las cotas inferiores se ajustan perfectamente, las superiores tienden a alejarse del conjunto no dominado. Por esta razón las cotas superiores son definidas como el máximo solamente sobre los puntos no dominados (ver Figura 2.7).

Definición 2.3 (Punto ideal y nadir) Los puntos $y^I, y^N \in \mathbb{R}^p$ donde

$$y_k^I := \min_{x \in X} f_k(x) = \min_{y \in \mathcal{Y}} y_k$$

y

$$y_k^N := \max_{x \in X_E} f_k(x) = \max_{y \in \mathcal{Y}_N} y_k,$$

son llamados punto ideal y nadir, respectivamente, del problema de optimización multi-objetivo (2.41).

El cálculo del punto ideal es considerado, desde el punto de vista de optimización multiobjetivo, fácil de hacer pues implica la solución de p problemas de un sólo objetivo. Sin embargo, el cálculo del punto nadir involucra la optimización restringido al conjunto eficiente, conjunto que desconocemos y para el cual nos facilitaría tener al nadir como cota superior. Por esta dificultad se aproxima a y^N utilizando heurísticas. Una forma de

	\mathbf{x}^1	\mathbf{x}^2	\dots	\mathbf{x}^{p-1}	\mathbf{x}^p
f_1	$f_1(\mathbf{x}^1)$	$f_1(\mathbf{x}^2)$	\dots	$f_1(\mathbf{x}^{p-1})$	$f_1(\mathbf{x}^p)$
f_2	$f_2(\mathbf{x}^1)$	$f_2(\mathbf{x}^2)$	\dots	$f_2(\mathbf{x}^{p-1})$	$f_2(\mathbf{x}^p)$
\vdots	\vdots	\vdots	\ddots	\vdots	\vdots
f_{p-1}	$f_{p-1}(\mathbf{x}^1)$	$f_{p-1}(\mathbf{x}^2)$	\dots	$f_{p-1}(\mathbf{x}^{p-1})$	$f_{p-1}(\mathbf{x}^p)$
f_p	$f_p(\mathbf{x}^1)$	$f_p(\mathbf{x}^2)$	\dots	$f_p(\mathbf{x}^{p-1})$	$f_p(\mathbf{x}^p)$

Tabla 2.1. Tabla de pagos para aproximar punto nadir

obtener una aproximación es utilizando una tabla de pagos, el procedimiento se aplica como sigue.

Sean \mathbf{x}^k , $k = 1 : p$ las soluciones de los p problemas monoobjetivo $\min\{f_k(\mathbf{x}) \mid \mathbf{x} \in \mathcal{X}\}$, respectivamente; es decir,

$$f_k(\mathbf{x}^k) = \min_{\mathbf{x} \in \mathcal{X}} f_k(\mathbf{x}).$$

Utilizando dichas soluciones óptimas se construye la Tabla 2.1. Finalmente, se considera el mayor elemento de la i -ésima fila como un estimado para y_i^N ; es decir,

$$\tilde{y}_i^N := \max_{k=1, \dots, p} f_i(\mathbf{x}^k).$$

El único caso en que \mathbf{y}^N puede ser determinado exactamente, es en un problema de dos objetivos. Aquí, el valor para y_2 es alcanzado cuando y_1 es mínimo y viceversa.

6.3. Métodos multiobjetivo de solución

En un problema de optimización multiobjetivo no existe una, sino un conjunto de soluciones que teóricamente son las mejores. Como se ha mencionado, este conjunto de soluciones es conocido como conjunto no dominado; en él se encuentran todas las soluciones que tienen la mejor evaluación entre todas aquellas con quienes pueden compararse. Como en todo problema de investigación de operaciones, la aplicación de los resultados teóricos tiene un fin específico, determinar cual es la solución óptima al problema; sin embargo, ¿cómo determinar de entre un conjunto de soluciones igualmente buenas e incomparables entre sí, cuál es la mejor de todas?

Es aquí donde el tomador de decisiones utiliza su experiencia y conocimiento del problema a solucionar para romper el empate y elegir la mejor solución a sus intereses. En estos problemas, el tomador de decisiones se involucra en la determinación de la solución al problema, no solo en la valoración de la forma de representarlo para posteriormente determinar la solución óptima, como habitualmente se hace en programación monobjetivo.

Existen dos enfoques principales para encontrar soluciones a un problema de optimización bajo múltiples objetivos:

El primero, conocido como *técnica de escalarización* o *método a priori*, consta de resolver un problema con una sola función objetivo; la forma de hacerlo puede ser:

- ponderar todos los objetivos con cierto criterio y optimizando su suma [38],
- optimizar un objetivo importante y restringir los restantes a ciertos valores[39],
- jerarquizar los objetivos y optimizarlos secuencialmente[40],
- optimizar una función de utilidad[41, 42] u
- optimizar la distancia hacia un punto de referencia.

Estas técnicas son fácilmente aplicables e intuitivas; sin embargo, dan como resultado exactamente una solución al aplicarse, la cual no necesariamente es no dominada. Aquí, el tomador de decisiones determina la importancia de cada objetivo para transformar el problema antes de optimizar, es por eso que es llamado *a priori*. Esta elección que hace es subjetiva e impacta en la solución que se considerará óptima, pues lo será solo para sus intereses.

Haciendo el rol del tomador de decisiones simulando cada elección mediante parámetros podemos encontrar un conjunto de soluciones al problema, una por vez. Aunque en teoría es posible determinar por completo el conjunto no dominado, hay una alta dependencia y poco control en la solución resultante ante la variación de los parámetros y las soluciones encontradas no necesariamente son no dominadas; por lo que, al menos las técnicas clásicas, resultan imprácticas.

En el segundo enfoque, se consideran todos los objetivos simultáneamente y se determina un subconjunto representativo de soluciones, después el tomador de decisiones elige

dentro de esas posibilidades la que mejor refleja sus necesidades; los métodos de este enfoque son llamados *métodos a posteriori*. Sólo para el caso lineal es posible determinar el conjunto no dominado por completo, utilizando una extensión del Método Simplex de programación lineal [43]. Para el caso no lineal, se utilizan en su mayoría métodos heurísticos para encontrar un conjunto de soluciones prometedoras, destacando entre ellos los Algoritmos Genéticos[44–46] porque su filosofía de una población de soluciones se adapta, usando sus propios términos, a las ideas de programación multiobjetivo.

Enseguida se muestran a mayor detalle las escalarizaciones utilizadas en esta investigación.

Método de la Suma Ponderada

El primer enfoque desarrollado para obtener soluciones y quizá el mas ampliamente estudiado, por su fácil comprensión, implementación y representación que tiene en la toma de decisiones, fue el Método de la Suma Ponderada, publicado por vez primera por Lofti Zadeh en 1963 [38]. Consiste en aplicar un peso o importancia a cada objetivo y minimizar la suma ponderada de éstos.

Formalmente, el método de la suma ponderada consiste en la transformación del problema multiobjetivo (2.41) a uno con una sola función objetivo de la forma

$$\min_{\mathbf{x} \in \mathcal{X}} \sum_{k=1}^p \lambda_k f_k(\mathbf{x}). \quad (2.44)$$

con $\lambda_k \geq 0$, $k = 1 : p$.

Esta transformación cuenta con propiedades muy importantes que sirvieron de base para mucha de la teoría multiobjetivo desarrollada hasta el momento, como caracterizaciones geométricas y analíticas de las soluciones y condiciones de optimalidad. Si cada valor de λ_k es positivo se asegura que la solución óptima del problema transformado (2.44) es una solución no dominada al problema original; y es débilmente no dominada si los parámetros son no negativos.

En la práctica es fácil e intuitivo para la persona que conoce a conciencia el problema interpretar la esencia del método y entenderlo. Sin embargo, aun en esos casos es difícil proporcionar valores apropiados para los parámetros λ_k que representen la importancia

de cada objetivo, si es que pueden asignarse, y los intereses del tomador de decisiones. Además, un cambio ligero en los valores de los parametros pueden producir soluciones nada parecidas en el espacio de los objetivos.

Una manera de encontrar un subconjunto del conjunto no dominado es variar los valores de los parámetros, optimizando el problema resultante cada vez. Sin embargo, solo en caso de que el problema sea convexo, se puede encontrar por completo el conjunto no dominado. La principal desventaja de este algoritmo es como elegir apropiadamente cada configuración para obtener al final un conjunto representativo, tanto en cantidad de elementos como en diversidad, del conjunto no dominado. Muchas de las configuraciones conducen a la misma solución pero también una sola configuración de los parámetros puede conducir a múltiples soluciones óptimas del problema transformado. Todas estas observaciones sirven de base para generalizar el método Simplex y determinar por completo el conjunto eficiente en el caso de un problema lineal multiobjetivo.

Geométricamente, podemos entender al problema transformado (2.44) como

$$\min_{\mathbf{y} \in \mathcal{Y}} \{\boldsymbol{\lambda} \cdot \mathbf{y} = c \mid c \in \mathbb{R}\} \quad (2.45)$$

Las soluciones factibles de (2.45) son la intersección del plano $\{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^p \mid \boldsymbol{\lambda} \cdot \mathbf{y} = c\}$ con el conjunto factible en el espacio de los objetivos \mathcal{Y} ; considerando c como un parámetro, el valor objetivo óptimo \hat{c} será encontrado en el valor mínimo de c tal que la intersección del plano con \mathcal{Y} es no vacía (*ver Figura 2.8*). Más aún, los puntos de la intersección serán no dominados si el vector $\boldsymbol{\lambda}$ tiene todas sus componentes positivas.

La Figura 2.9 muestra de forma gráfica el efecto de variar los valores de los parámetros para obtener soluciones. Esta imagen muestra algunos detalles importantes que aparecen al aplicar el método de la suma ponderada:

- Una misma configuración puede tener varias soluciones óptimas al problema transformado, es el caso de λ_1 . Dependiendo del conocimiento y la estructura del problema original, se pueden emplear técnicas para elegir de forma más inteligente las configuraciones específicas que permitan encontrar múltiples soluciones.
- Un punto no dominado puede ser encontrado por varias configuraciones de los parámetros, es el caso de $\hat{\mathbf{y}}^2$. Las técnicas que mejoran el método de la suma ponderada

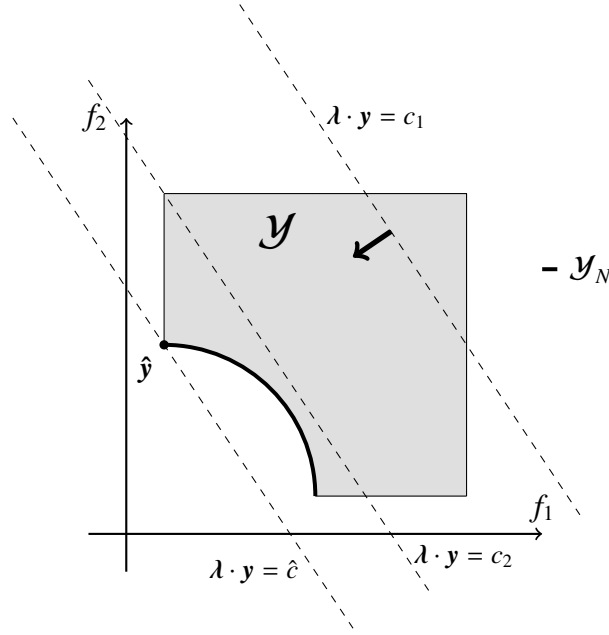


Figura 2.8. Método gráfico para suma ponderada

buscan evitar la elección de estas configuraciones para no hacer esfuerzo innecesario. El método por excelencia que evita estas configuraciones y elige aquellas que permiten encontrar, inclusive una infinidad de soluciones, es el método Simplex Biobjetivo[43].

- Aún variando sobre todas las posibles configuraciones, solamente es posible encontrar los puntos no dominados \hat{y}^1 y \hat{y}^2 . Esta es quizá la mayor desventaja teórica del método de la suma ponderada; solamente en caso de que \mathcal{Y} sea convexo⁵ puede asegurarse que el conjunto no dominado puede ser encontrado por completo. Esta situación es agravada cuando las variables de decisión toman valores discretos.
- Si el valor de algún λ_k es cero, una faceta del conjunto puede ser la solución óptima del problema transformado. Las soluciones que encuentra el método de la suma ponderada en este caso son débilmente no dominadas.

Además, la ponderización de los objetivos depende de que estos se encuentren en el mismo orden de magnitud, cosa que muy pocas veces sucede. Por tanto, es necesario normalizar los objetivos para trabajar en la misma escala. Esta normalización representa un problema pues se deben conocer los valores mínimos y máximos de cada objetivo.

⁵Basta que sea $\mathcal{Y} + \mathbb{R}_{\geq}^p = \{y \in \mathbb{R}^p \mid y = y_1 + y_2; y_1 \in \mathcal{Y}, y_2^k \geq 0, k = 1:p\}$ sea convexo.

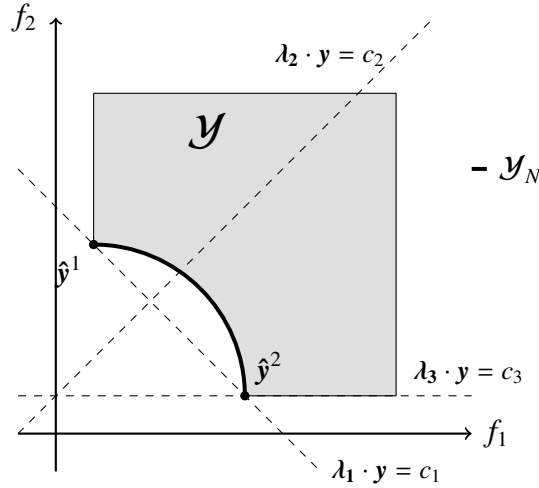


Figura 2.9. Soluciones encontradas por suma ponderada

Método de las ε -restricciones

Otra técnica de escalarización muy conocida es el método de las ε -restricciones. Fue propuesta por Vira y Haimes en el año de 1983 [39]. El método minimiza una función objetivo f_j y considera como restricciones los objetivos restantes, acotados cada uno por un parámetro ε_k . Sustituimos, el problema (2.41) por

$$\begin{aligned} \min_{x \in \mathcal{X}} \quad & f_j(x) \\ \text{s.a:} \quad & f_k(x) \leq \varepsilon_k, \quad k = 1:p, \quad k \neq j \end{aligned} \quad (2.46)$$

donde $\varepsilon = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_p) \in \mathbb{R}^p$.

Al igual que el método de las ponderaciones, este método se ve limitado tanto por la elección de la función objetivo a optimizar como por las cotas impuestas a los objetivos restantes. En la práctica, esta técnica puede verse como la optimización de la función objetivo mas importante, considerando que las restantes no sobrepasen un valor de interés.

Geométricamente, estamos acotando al conjunto factible en el espacio de los objetivos por $p - 1$ cotas paralelas a los ejes. La Figura 2.10 muestra un problema con dos objetivos donde el segundo de ellos es minimizado, mientras que el primero se acota por cuatro valores distintos para el parámetro ε_1 . De la ilustración podemos hacer las observaciones siguientes:

- No existe solución factible al problema, si exigimos que el valor de alguna función

resolver problemas innecesarios, deseamos seleccionar apropiadamente el valor máximo que puede tomar cada parámetro ε_k ; lo ideal sería seleccionarlo como la cota superior del conjunto no dominado para el objetivo correspondiente. Sin embargo, como se mencionó anteriormente, no se pueden determinar exactamente las cotas del conjunto no dominado para mas de dos objetivos simultáneos; por lo que se utilizan aproximaciones.

Método AUGMECON 2

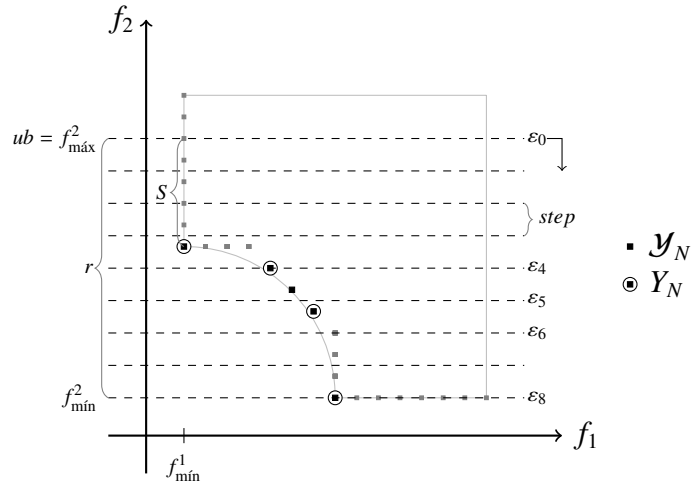
El método AUGMECON en su segunda versión es una mejora del método de las ε -restricciones propuesto por George Mavrotas en el año 2013 [47, 48]. La idea del método es seleccionar apropiadamente las cotas de cada objetivo en el método de la ε -restricciones, restringidas entre las cotas del conjunto no dominado (o su aproximación), haciendo una partición del conjunto factible en el espacio de los objetivos.

El método asegura que la solución encontrada es no dominada al minimizar, en segundo plano, el resto de los objetivos lexicográficamente. Además permite saltar las particiones que dirigen a la misma solución no dominada, utilizando la información de la mejora obtenida en cada uno de los objetivos secundarios.

Formalmente, se transforma el problema (2.41) a la siguiente formulación

$$\begin{aligned}
 \min \quad & f_1(\mathbf{x}) - \mu \left(\frac{S_2}{r_2} + 10^{-1} \frac{S_3}{r_3} + \dots + 10^{-(p-2)} \frac{S_p}{S_p} \right) \\
 \text{s.a:} \quad & f_2(\mathbf{x}) + S_2 = \varepsilon_2 \\
 & f_3(\mathbf{x}) + S_3 = \varepsilon_3 \\
 & \vdots \\
 & f_p(\mathbf{x}) + S_p = \varepsilon_p \\
 & \mathbf{x} \in \mathcal{X}
 \end{aligned} \tag{2.47}$$

Sin pérdida de generalidad, se supone que se optimiza la primer función objetivo y las restantes se convierten en restricciones, siendo acotadas de igual modo que en el método de la ε -restricciones. Note que en la función objetivo aparece un término, proporcional a un parametro $\mu \in [10^{-6}, 10^{-3}]$, que beneficia al valor objetivo mientras se minimizan je-



Y_N es el subconjunto de puntos no dominados obtenidos mediante el Augmecon2

Figura 2.11. Funcionamiento del método AUGMECON2.

rárquicamente el resto de los objetivos, haciendo lo mayor posible las variables de holgura S_i , $i=2:p$.

En este estudio utilizamos este método de solución para el caso biobjetivo; por facilidad y para reducir la complejidad, se hacen ligeras modificaciones basados en la forma de calculo de las cotas de \mathcal{Y}_N . Una forma ilustrada de la metodología es mostrada en la Figura 2.11; así como el diagrama de flujo correspondiente en la Figura 2.12.

El primer paso es determinar las cotas de la región de \mathcal{Y} donde haremos la malla (o partición de intervalos en caso biobjetivo). En este caso, tanto el punto ideal como nadir pueden ser calculados de manera exacta. Sin embargo, el calculo de este último implica la optimización de un objetivo sujeto a que el otro se encuentra en su mínimo; esta cota puede relajarse a la aproximación de la tabla de costos (véase *Tabla 2.1*) y se determinará de forma exacta en una de las iteraciones del método.

Fijando las cotas de la región donde se buscaran soluciones, se determina el rango de variación (r) para las cotas del segundo objetivo como restricción ($\varepsilon \in [f_{\min}^2, f_{\max}^2]$). Cabe señalar que si las cotas son iguales, estamos en presencia de un problema monobjetivo pues $f_{\min}^2 = f_{\max}^2 = f_1(\mathbf{x}^1)$ con $\mathbf{x}^1 = \min\{f_1(\mathbf{x}) \mid \mathbf{x} \in \mathcal{X}\}$.

El tamaño de paso ($step$) es determinado dividiendo el rango de variación (r) por la cantidad de particiones deseada (g). Además inicializamos el contador del número de saltos $i = 0$.

Así, definimos iterativamente el valor de la cota para el objetivo que está como restricción como $\varepsilon_i = f_{\max}^2 - i \cdot \text{step}$ y resolvemos para determinar una solución por vez, del mismo modo que ε -restricciones.

En la primer iteración, se exige que $f_2(\mathbf{x}) \leq f_{\max}^2$. En este caso, una solución óptima para ε -restricciones⁶ es \mathbf{x}^1 ; en el espacio de los objetivos, cualquier solución con la misma abscisa y menor ordenada es óptima también. Sin embargo, como el valor objetivo del Augmecon mejora si nos alejamos de la cota ε_0 , la variable de holgura aumenta tanto como le es posible, obteniendo una solución estrictamente dominada, como puede apreciarse en la Figura 2.11.

Note que toda solución encontrada con los valores de ε_i en el rango del valor de S , es la misma que ya se encontró. Por lo tanto, se define un tamaño de paso $b = \left\lfloor \frac{S}{\text{step}} \right\rfloor$ y se incrementa el contador de paso i por el tamaño de paso mas 1. Haciendo que la próxima cota impuesta ($\varepsilon_4 = ub - (b + 1)\text{step}$) permita encontrar otra solución no dominada y evitando, con un sencillo cálculo, resolver problemas innecesarios; esto y el hecho de asegurar encontrar una solución no dominada, al incorporar una optimización jerárquica, es lo que diferencia al AUGMECON 2 del método de las ε -restricciones.

Note además como se encuentra una de las soluciones no dominadas que se utilizan para calcular el punto nadir; sin embargo, se logra sin imponer una restricción tan fuerte. Del mismo modo para la segunda solución que acota al conjunto no dominado (donde f_2 es mínimo); en algunos casos, puede evitarse resolver el último problema, monitoreando cuando se alcanza el valor mínimo para f_2 .

Note que no todas las soluciones no dominadas son encontradas por este método; es el caso de la solución que se encuentra entre ε_4 y ε_5 , perdida por el tamaño de salto step . Al igual que en el método de las ε -restricciones, si aumentamos el tamaño de particiones, incrementamos la posibilidad de encontrar nuevas soluciones; sin embargo, esto implicaría resolver mas problemas. Por tanto, la elección adecuada de la cantidad de particiones g es de suma importancia.

⁶Recuerde que si fuéase única, lo habríamos determinado anteriormente.

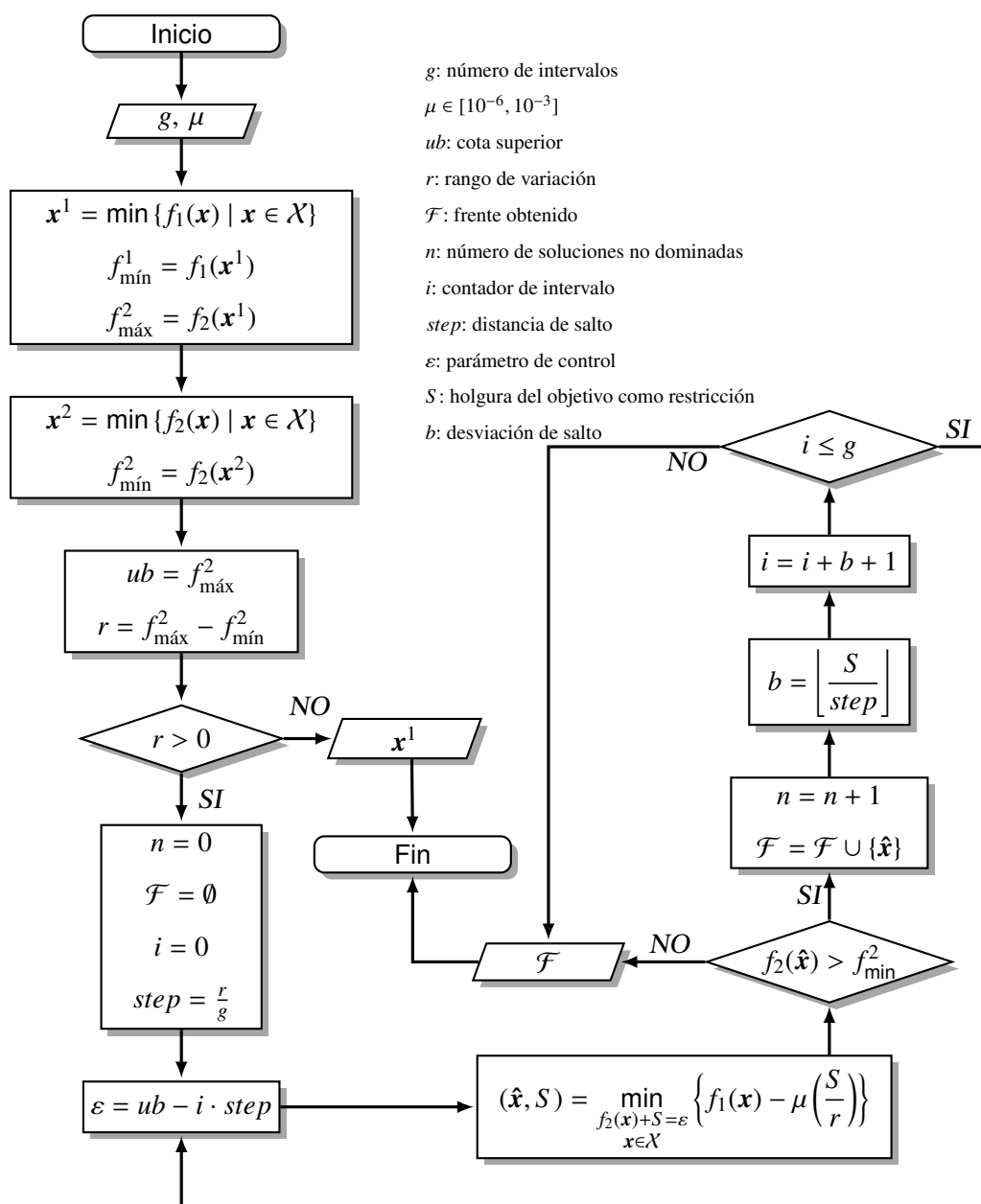


Figura 2.12. Diagrama de flujo del método AUGMECON2

Característica	Método	Suma ponderada	ε -restricciones	AUGMECON2
No es necesario calcular cotas como preprocesamiento		✗	✗	✗
Encuentra soluciones estrictamente no dominadas		✓	✗	✓
No depende de la geometría del problema		✗	✓	✓
Determina una solución distinta por problema resuelto		✗	✗	✓

Tabla 2.2. Comparación de los métodos de solución

Capítulo 3

Descripción y modelación del problema

Contenidos

1. Modelo basado en latencia	36
2. Modelo basado en costo	43
3. Análisis del contraste de los objetivos	47

El problema de estudio combina y extiende dos problemas importantes de la optimización combinatoria: el problema del agente viajero y el problema de mínima latencia, se extiende a ambos con la posibilidad de hacer múltiples viajes y considera una capacidad limitada del vehículo. En ambos problemas se desea encontrar una ruta que parta y termine del depósito inicial y que visite a cada cliente exactamente una vez; esto permitiendo al vehículo regresar al depósito a recargar mercancía y salir de nuevo. La diferencia radica en el objetivo que hay detrás de cada problema. El primero, busca determinar la ruta que tenga la menor distancia. El segundo, encontrar la que minimice el tiempo de espera de todos los clientes, conocido como latencia. En este caso, se desea encontrar soluciones que representen un buen compromiso para ambos problemas; es decir, deseamos encontrar soluciones que formen parte del frente Pareto del Problema Bi-objetivo del Agente Viajero con Múltiples Rutas, bajo los objetivos de costo y latencia.

Para la formulación del problema biobjetivo, se debe tomar en cuenta las diferentes formulaciones que existen para cada problema por separado. Se ha comprobado que la aplicación del objetivo de latencia sobre un modelo desarrollado originalmente para costo no resulta en una modelación conveniente [1, 2, 7]. Sin embargo, no ha sido estudiado si los modelos de latencia pueden igualar a aquellos ya desarrollados para minimizar el

costo. Por esta razón se presentan dos formulaciones para abordar los dos objetivos simultáneamente. El primero desarrollado para latencia; un modelo que utiliza ideas de la modelación usando la red multinivel propuesta por Picard y Queyranne [25]. La segunda formulación esta basada en el modelo de costo de Azi et al[27].

1. Modelo basado en latencia

Dado un vehículo con capacidad de carga Q que entrega productos a un conjunto de clientes, nodos de un grafo $G = (V, A)$ con $V = \{1, 2, \dots, n\}$. Una matriz $C = (c_{ij})$ de tiempos de traslado asociadas entre cada par de clientes $(i, j) \in A$. Cada cliente $i \in V$ es caracterizado por una demanda d_i y un tiempo de servicio s_i . Durante el día, el vehículo debe hacer $R = n + 1$ viajes que inician y terminan en el depósito o nodo 0, con demanda y tiempo de servicio con valor cero. El objetivo es minimizar el tiempo de espera total de todos los clientes sin sobrepasar la capacidad del vehículo.

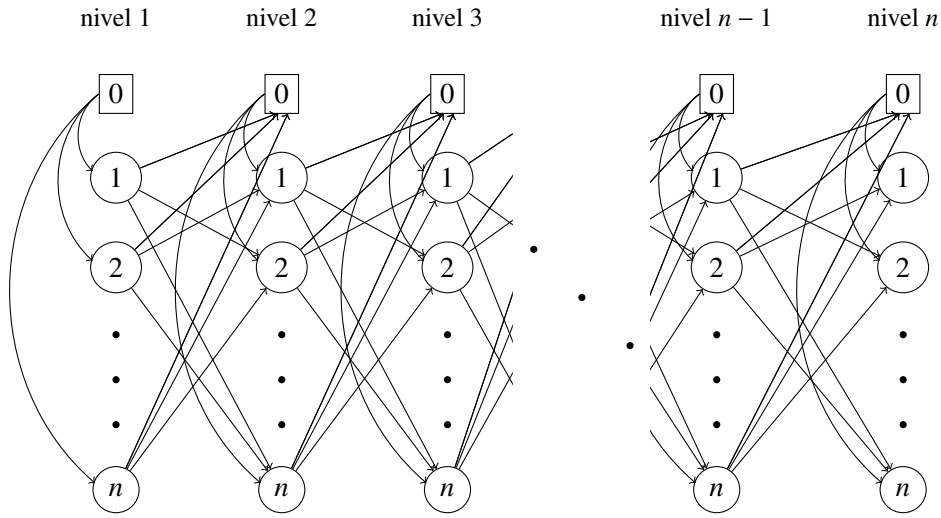
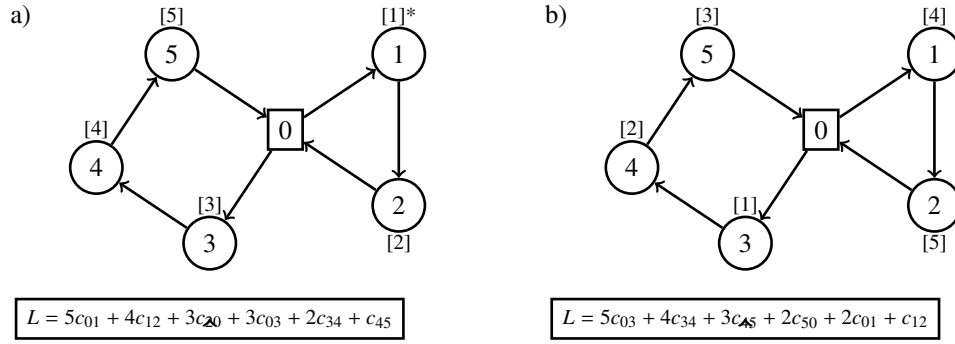


Figura 3.1. Red multinivel para modelación basada en latencia.

La Figura 3.1 muestra la red multinivel utilizada en esta formulación. Si no tomamos en cuenta los depósitos y su conexión con los clientes, esta red es la que utiliza Picard y Queyranne [25]. La idea es encontrar un camino a través de los clientes de manera que la latencia pueda calcularse fácilmente en dependencia del nivel en que se encuentre el cliente en la ruta. Es decir, la aportación del arco que llega al cliente i , es proporcional al nivel en que se encuentra este cliente; a niveles superiores menos veces debe ser considerado el arco en la latencia total. La idea tras esta formulación que proponemos es similar;



* $[\cdot]$ representa el orden en que se visita el cliente en la ruta
 Por simplificación, se consideran los tiempos de servicio $s_i = 0$

Figura 3.2. Importancia del orden en los viajes para la latencia

sin embargo; como se mostró en el Capítulo 2, la utilización directa de estas ideas modela un problema con un significado de latencia como tiempo total de espera[7], incluyendo lo que se espera para que el vehículo regrese cada vez al depósito.

En este caso, consideramos como latencia el tiempo total de espera de los clientes, siendo los tiempos de espera del depósito prescindibles. Como puede apreciarse en el modelo de Angel-Bello[7], el uso de copias de los depósitos permite saber cuándo inicia y cuándo termina un viaje; sin embargo, como se muestra en la Figura 3.2, es imperante conocer el orden que siguen los viajes pues la latencia, a diferencia del objetivo de costo, se ve afectada por el orden de aparición de las rutas.

Por tal motivo, utilizamos la variable binaria y_{0j}^k que nos ayuda no solo a conocer si el cliente j inicia un viaje sino que lo inicia en el k -ésimo nivel; con esto sabemos que se han visitado $k - 1$ clientes antes de llegar al depósito del cual inicia este nuevo viaje.

$$y_{0j}^k = \begin{cases} 1, & \text{si el arco } (0, j) \text{ es usado en la solución} \\ & \text{y el cliente } j \text{ está en la posición } k \\ 0, & \text{en caso contrario} \end{cases} \quad (3.1)$$

Conociendo dónde inicia cada viaje, la red multinivel de la Figura 3.1 puede utilizarse de forma similar a la de Picard y Queyranne, agregando tantas veces cada arco y tiempo de servicio dependiendo del nivel en el que se encuentra el vehículo. Para conocer cuáles arcos se utilizan y entre qué niveles, definimos la variable y_{ij}^k como

$$y_{ij}^k = \begin{cases} 1, & \text{si el arco } (i, j) \text{ es usado en la solución} \\ & \text{y el cliente } i \text{ está en la posición } k \\ 0, & \text{en caso contrario} \end{cases} \quad (3.2)$$

Por último, como es usual en las modelaciones que utilizan las redes multinivel, es necesario utilizar variables de control de la posición de cada cliente:

$$x_i^k = \begin{cases} 1, & \text{si el cliente } i \text{ se visita en la posición } k \\ 0, & \text{en caso contrario} \end{cases} \quad (3.3)$$

Utilizando dichas variables es intuitivo calcular la latencia de una ruta.

Como se había mencionado con anterioridad, los objetivos que considera la formulación son de latencia total y distancia total de la ruta.

- **Objetivo de latencia.** Se busca minimizar la suma de los tiempos de espera de los clientes.

$$\sum_{j=1}^k \sum_{k=1}^n (n - k + 1) c_{0j} y_{0j}^k + \sum_{i=1}^n \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n \sum_{k=1}^n (n - k) (s_i + c_{ij}) y_{ij}^k \quad (3.4)$$

Una forma sencilla de interpretar la ecuación anterior es considerando el coeficiente de cada arco de la ruta como la cantidad de clientes que están después de dicho arco multiplicado, por supuesto, por su tiempo de transportación y su tiempo de servicio. Es decir, un arco aparece en la latencia total tantas veces como clientes hay después de él.

- **Objetivo de distancia.** Se desea minimizar la distancia total recorrida por el vehículo para visitar a todos los clientes.

$$\sum_{j=1}^k \sum_{k=1}^n c_{0j} y_{0j}^k + \sum_{i=1}^n \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n \sum_{k=1}^n c_{ij} y_{ij}^k + \sum_{i=1}^n c_{i0} x_i^n \quad (3.5)$$

Note que únicamente en la función objetivo de costo, se considera el ultimo arco de regreso al depósito.

Para que una ruta sea factible, debe cumplir las siguientes condiciones:

- Existe un solo nodo activo en cada nivel y que cada nivel tiene activo exactamente un nodo.

$$\sum_{k=1}^n x_i^k = 1 \quad i = 1 : n \quad (3.6)$$

$$\sum_{i=1}^n x_i^k = 1 \quad k = 1 : n \quad (3.7)$$

- El vehículo comienza la ruta en el depósito y parte hacia el cliente activo del primer nivel.

$$y_{0j}^1 = x_j^1 \quad j = 1 : n \quad (3.8)$$

- El vehículo solo puede llegar a nodos activos, puede hacerlo desde del depósito o desde otro cliente.

$$y_{0j}^k + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^n y_{ij}^{k-1} = x_j^k \quad j = 1 : n, k = 2 : n \quad (3.9)$$

- Si el vehículo se encuentra en un nodo activo, a excepción de que se encuentre en el último nivel, debe salir de éste. Puede hacerlo hacia el depósito o hacia cualquier cliente.

$$\sum_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n y_{ij}^k = x_i^k \quad i = 1 : n, k = 1 : n - 1 \quad (3.10)$$

Las condiciones anteriores aseguran que el vehículo visite exactamente una vez a cada cliente, al haber n niveles y asegurar que solo hay un nodo activo por nivel y cada nivel activa un solo nodo. Además, partiendo desde el depósito hacia al primer nivel y de ahí asegurando que entrando a un nivel se debe salir hacia al siguiente, logramos una ruta desde el depósito hasta el nivel n , permitiendo que el vehículo regrese a éste varias veces y vuelva a salir. Note que no es necesario exigir que la ruta termine en el depósito; es decir, no es necesario obligar a que un arco salga del nivel n , pues este arco no es de importancia para la latencia. Para el costo tampoco es necesario asignarlo, si entendemos que del último nodo activo el arco forzosamente debe salir hacia el depósito, situación que refleja el último término de la función objetivo de costo.

Es importante notar que la ruta obtenida no contiene subtours, a pesar de no haber agregado restricciones para esto como las formulaciones usuales. Esta es una característica

importante de la modelación basada en una red multinivel. Sin embargo; aún es necesario obligar al vehículo a regresar al depósito a recargar mercancía; es decir, cuando su capacidad se vea limitada para servir a un cliente más. Puede notar que las restricciones anteriores permiten al vehículo regresar al depósito, pero no lo obligan a que lo haga cuando es necesario. Las siguientes condiciones, inspiradas en las restricciones de eliminación de subtours, obligan al vehículo a no rebasar su capacidad y regresar al depósito para recargar mercancía. Para lograrlo, hacemos uso de las variables w_k que representan la demanda acumulada (o mercancía entregada) desde el último depósito hasta el k -ésimo nivel.

$$w_k : \begin{array}{l} \text{Demanda acumulada hasta el } k\text{-ésimo cliente, contada a partir} \\ \text{de la ultima visita al depósito anterior a ese cliente.} \end{array} \quad (3.11)$$

$$w_1 = \sum_{i=1}^n d_i x_i^1 \quad (3.12)$$

$$w_{k+1} \geq w_k + \sum_{i=1}^n d_i x_i^{k+1} - Q \sum_{i=1}^n y_{i0}^k \quad k = 1 : n - 1 \quad (3.13)$$

$$w_{k+1} \geq \sum_{i=1}^n d_i x_i^{k+1} + Q \left(\sum_{i=1}^n y_{i0}^k - 1 \right) \quad k = 1 : n - 1 \quad (3.14)$$

$$w_k \leq Q \quad k = 1 : n \quad (3.15)$$

Al iniciar la ruta, se fija la primer demanda acumulada en (3.12). La condición (3.14) será redundante y el ultimo término de (3.13) será cero hasta que se deba regresar al depósito, mientras tanto

$$w_{k+1} \geq w_k + \sum_{i=1}^n d_i x_i^{k+1} .$$

Es decir, la demanda acumulada en el nivel k es al menos la demanda acumulada en el nivel anterior más la demanda del nivel actual. Si al visitar al siguiente cliente, el vehículo sobrepasara su capacidad, (3.15) obligará a que el vehículo regrese al depósito haciendo a (3.13) redundante y activando (3.14), haciendo que la demanda acumulada se inicialice

considerando solo el primer cliente del viaje en que se encuentra; esto es

$$w_{k+1} \geq \sum_{i=1}^n d_i x_i^{k+1}.$$

Puesto que deseamos minimizar el tiempo de espera, cada viaje debería tener la mayor cantidad de clientes para no perder tiempo innecesario en regresar al depósito; así, cuando sea necesario, cada valor de la demanda acumulada, w_k , se ajustará a su cota inferior para lograrlo.

De esta forma, el modelo matemático correspondiente al enfoque de latencia es el siguiente:

$$\min \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n (n-k+1) c_{0j} y_{0j}^k + \sum_{i=1}^n \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n \sum_{k=1}^n (n-k) (t_i + c_{ij}) y_{ij}^k \quad (3.4)$$

$$\min \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n c_{0j} y_{0j}^k + \sum_{i=1}^n \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n \sum_{k=1}^n c_{ij} y_{ij}^k + \sum_{i=1}^n c_{i0} x_i^n \quad (3.5)$$

$$\text{s.a: } \sum_{k=1}^n x_i^k = 1 \quad i = 1 : n \quad (3.6)$$

$$\sum_{i=1}^n x_i^k = 1 \quad k = 1 : n \quad (3.7)$$

$$y_{0j}^1 = x_j^1 \quad j = 1 : n \quad (3.8)$$

$$y_{0j}^k + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^n y_{ij}^{k-1} = x_j^k \quad j = 1 : n, k = 2 : n \quad (3.9)$$

$$\sum_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n y_{ij}^k = x_i^k \quad i = 1 : n, k = 1 : n-1 \quad (3.10)$$

$$w_1 = \sum_{i=1}^n d_i x_i^1 \quad (3.12)$$

$$w_{k+1} \geq w_k + \sum_{i=1}^n d_i x_i^{k+1} - Q \sum_{i=1}^n y_{i0}^k \quad k = 1 : n-1 \quad (3.13)$$

$$w_{k+1} \geq \sum_{i=1}^n d_i x_i^{k+1} + Q \left(\sum_{i=1}^n y_{i0}^k - 1 \right) \quad k = 1 : n-1 \quad (3.14)$$

$$w_k \leq Q \quad k = 1 : n \quad (3.15)$$

$$x_i^k \in \{0, 1\} \quad i = 1 : n, k = 1 : n \quad (3.3)$$

$$y_{0j}^k \geq 0 \quad j = 1 : n, k = 1 : n \quad (3.1)$$

$$y_{ij}^k \geq 0 \quad i = 1 : n, j = 0 : n, k = 1 : n - 1 \quad (3.2)$$

$$w_k \geq 0 \quad k = 1 : n \quad (3.11)$$

Note que es suficiente con exigir que las variables y_{ij}^k y y_{0j}^k sean no negativas, pues las restricciones solo permiten que tomen valores binarios. Supongamos que $x_r^k = 1$ y $x_s^{k+1} = 1$, entonces por (3.10), $\sum_{\substack{j=0 \\ j \neq r}}^n y_{rj}^k = 1$ y $\sum_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n y_{rj}^k = 0$, $i = 1 : n$, $i \neq r$ por (3.6) y (3.7). Esto implica que unicamente las variables y_{rj}^k , $j = 0 : n$, pueden tomar valores positivos.

Por otro lado, de (3.8) y (3.9) concluimos que o bien $y_{0s}^1 = 1$ ó $y_{0s}^{k+1} + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq s}}^n y_{is}^k = 1$ y que $y_{0j}^{k+1} + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^n y_{ij}^k = 0$, $j = 0 : n$, $j \neq s$ por (3.6) y (3.7); es decir, unicamente las variables y_{0s}^{k+1} y y_{is}^{k+1} , $i = 1 : n$ pueden tomar valores positivos.

La consecuencia de estas conclusiones es que los arcos que van del nivel k al $k + 1$ solo pueden salir del nodo r y que todos los arcos que llegan al nivel $k + 1$, llegan al nodo s ; es decir, se va del nivel k al $k + 1$ por el arco (s, t) . Por lo tanto las variables y_{ij}^k y y_{0j}^k toman el valor de cero o uno, sin necesidad de restringir su naturaleza.

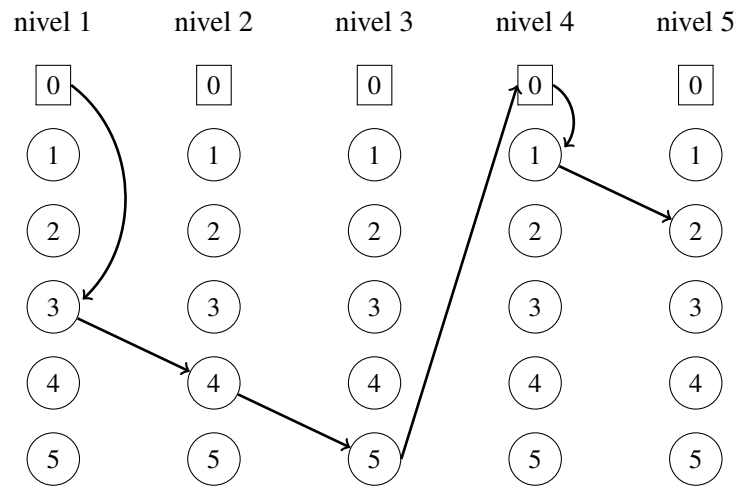


Figura 3.3. Red multinivel para la ruta mostrada en la Figura 3.2b.

2. Modelo basado en costo

Dado un vehículo con capacidad de carga Q que entrega productos a un conjunto de clientes, nodos de un grafo completo y dirigido $G = (V, A)$ con $V = \{1, 2, \dots, n\}$. Una matriz $C = (c_{ij})$ de distancias asociadas entre cada par de clientes $(i, j) \in A$. Cada cliente $i \in V$ es caracterizado por una demanda d_i y un tiempo de servicio s_i . Durante el día, el vehículo debe hacer $R = n + 1$ viajes que inician en el depósito o nodo 0 y terminan en una copia del mismo, el nodo $n + 1$ del grafo; ambos con demanda, tiempo de servicio y distancia de traslado entre ellos con valor cero. El objetivo es minimizar simultáneamente la distancia y latencia total de la ruta sin sobrepasar la capacidad del vehículo.

Azi et al [27] propusieron un modelo para un problema de un solo vehículo con múltiples rutas y ventanas de tiempo, con el objetivo de minimizar el costo de la ruta sin sobrepasar la capacidad del vehículo y haciendo cada entrega conforme a los horarios establecidos. El que se presenta enseguida es una adaptación que no considera ventanas de tiempo pero si los múltiples viajes del vehículo. Con el fin de calcular la latencia, se agregan nuevas variables y restricciones necesarias.

La idea general del modelo es considerar un conjunto de viajes suficientes para que la ruta sea factible; si algún viaje no fuese necesario, su aportación a las funciones objetivo será nula. Además, se tendrá registro del viaje en que se encuentra cada cliente utilizando la variable y_i^r .

$$y_i^r = \begin{cases} 1, & \text{si el cliente } i \text{ se encuentra en el viaje } r \\ 0, & \text{en caso contrario} \end{cases} \quad (3.16)$$

Considerando la variable anterior como un control para hacer llegar y salir arcos únicamente de los clientes activos en cierto viaje, definimos la variable x_{ij}^r para definir las conexiones entre los clientes. Note que se tendrá conocimiento no solo de la conexión sino del viaje en que ésta se encuentra.

$$x_{ij}^r = \begin{cases} 1, & \text{si el arco } (i, j) \text{ se encuentra en el } r\text{-ésimo viaje} \\ 0, & \text{en caso contrario} \end{cases} \quad (3.17)$$

Con estas variables, nos es posible definir las condiciones que permiten construir parcialmente una ruta que cumple al menos un flujo correcto entre sus conexiones. En otras palabras, cumple las siguientes ideas básicas:

- Visitar todos los clientes y asegurar que aparecen exactamente una vez en algún viaje;

$$\sum_{r=1}^R y_i^r = 1, \quad i = 1 : n. \quad (3.18)$$

- Al hacer una conexión entre dos clientes, esta debe estar dentro del mismo viaje

$$\sum_{j=0}^{n+1} x_{ij}^r = y_i^r \quad i = 1 : n, \quad r = 1 : R. \quad (3.19)$$

- cuando el vehículo llega a algún cliente, debe partir exactamente del mismo

$$\sum_{i=0}^{n+1} x_{ih}^r = \sum_{j=0}^{n+1} x_{hj}^r, \quad h = 1 : n, \quad r = 1 : R. \quad (3.20)$$

- Por cada viaje hay exactamente un arco que viene del depósito

$$\sum_{j=1}^{n+1} x_{0j}^r = 1, \quad r = 1 : R, \quad (3.21)$$

y uno que va al depósito al final

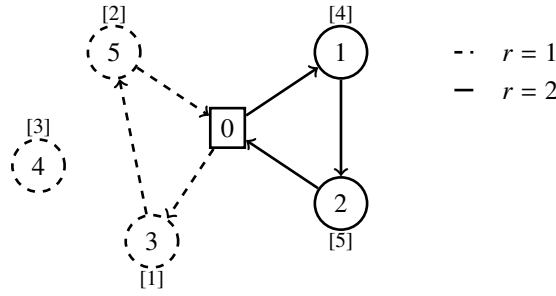
$$\sum_{i=0}^n x_{i,n+1}^r = 1, \quad r = 1 : R. \quad (3.22)$$

Ningún viaje debe exceder la capacidad del vehículo

$$\sum_{i=1}^n d_i y_i^r \leq Q, \quad r = 1 : R \quad (3.23)$$

Note que (3.21) y (3.22) permiten la creación de viajes vacíos; es decir que vayan del nodo 0 al $n + 1$. Esta situación no carece de sentido pues R es una cota superior para los viajes necesarios en la ruta y esta es la manera en que se completa la cantidad total de viajes fijados.

En este punto, una solución factible para el modelo no es necesariamente una ruta pues una situación como la de la Figura 3.4 no incumple las condiciones expuestas. Las que siguen son la adaptación correspondiente de las restricciones de eliminación de subtour



* $[\cdot]$ representa el orden en que se visita el cliente en la ruta

** r hace referencia al número de viaje en la ruta

Figura 3.4. Ejemplo de un subtour en una ruta

propuestas por Miller, Tucker y Zemlin en 1960[16] capaces de calcular el tiempo de espera de los clientes. Se hace uso de las variables l_i^r las cuales calculan la latencia de cada cliente en dependencia del viaje en que se encuentre,.

$$l_i^r : \text{ tiempo de espera del cliente } i. \quad (3.24)$$

Cuando se visita al cliente j inmediatamente después del i en determinado viaje, entonces se acota inferiormente el tiempo de espera del j -ésimo cliente por el tiempo que esperó el cliente anterior aunado al tiempo que se tarda en servir a este último mas el traslado hasta j ; en caso contrario las restricción es redundante. Puesto que estas variables conjugan la función objetivo; al minimizarse ésta, las variables se ajustan a su cota haciendo el calculo exacto de la latencia en ese viaje. Si el cliente i no pertenece al r -ésimo viaje, entonces l_i^r tomará el valor de cero.

$$l_i^r + s_i + c_{ij} - D(1 - x_{ij}^r) \leq l_j^r; \quad i, j = 0 : n + 1, r = 1 : R \quad (3.25)$$

Las variables t_0^r y t_{n+1}^r representan el tiempo de inicio y terminación de cada viaje, respectivamente. D es una cantidad suficientemente grande usada comúnmente en estas formulaciones para linearizar un par de condiciones lógicas; en este caso. D puede interpretarse como el tiempo que dura el turno laboral completo del conductor del vehículo pues el último cliente atendido no puede esperar mas de un turno del conductor.

Los valores de las variables se calculan en cadena siguiendo la ruta establecida como solución. Sin embargo, es necesario pasar el registro del tiempo transcurrido al final de cada viaje para que inicie el próximo.

$$l_0^{r+1} \geq l_{n+1}^r, \quad r = 1 : R - 1 \quad (3.26)$$

En caso de que la solución consista de menos de R viajes, los viajes vacíos pueden posicionarse en cualquier lugar pues (3.26) permite que el tiempo transcurrido al inicio y al final de un viaje vacío sea el mismo sin afectar el tiempo de espera de los clientes posteriores.

De esta forma, tanto la latencia como el costo pueden calcularse fácilmente utilizando su definición.

La formulación basada en costo para el problema de estudio es:

$$\min \sum_{r=1}^R \sum_{i=1}^n l_i \quad (3.27)$$

$$\min \sum_{r=1}^R \sum_{i=0}^{n+1} \sum_{j=0}^{n+1} c_{ij} x_{ij}^r \quad (3.28)$$

$$\text{s.a: } \sum_{r=1}^R y_i^r = 1, \quad i = 1 : n. \quad (??)$$

$$\sum_{j=0}^{n+1} x_{ij}^r = y_i^r \quad i = 1 : n, r = 1 : R. \quad (3.19)$$

$$\sum_{i=0}^{n+1} x_{ih}^r = \sum_{j=0}^{n+1} x_{hj}^r, \quad h = 1 : n, r = 1 : R. \quad (3.20)$$

$$\sum_{j=1}^{n+1} x_{0j}^r = 1, \quad r = 1 : R, \quad (3.21)$$

$$\sum_{i=0}^n x_{i,n+1}^r = 1, \quad r = 1 : R. \quad (3.22)$$

$$\sum_{i=1}^n d_i y_i^r \leq Q, \quad r = 1 : R \quad (3.23)$$

$$l_i^r + s_i + c_{ij} - D(1 - x_{ij}^r) \leq l_j^r; \quad i, j = 0 : n + 1, r = 1 : R \quad (3.25)$$

$$l_0^{r+1} \geq l_{n+1}^r, \quad r = 1 : R - 1 \quad (3.26)$$

$$x_{ij}^r \in \{0, 1\}; \quad i, j = 0 : n + 1, r = 1 : R \quad (3.17)$$

$$y_i^r \in \{0, 1\}; \quad i = 1 : n, r = 1 : R \quad (3.16)$$

$$l_i^r \geq 0; \quad i = 0 : n + 1, r = 1 : R \quad (3.24)$$

3. Análisis del contraste de los objetivos

Para justificar el uso de metodologías multiobjetivo; es necesario demostrar que existe un conflicto entre el objetivo de distancia y de latencia. En otras palabras, si el problema fuese monobjetivo, el valor óptimo de un objetivo sería múltiplo escalar del óptimo del segundo.

Utilizando el método AUGMECON2 se encontraron soluciones no dominadas de instancias de 10 y 15 clientes¹, los cuales aparecen en el Apéndice B. Las Figuras 3.5 y 3.6 muestran los valores mínimos para ambos objetivos en instancias de 10 y 15 clientes, respectivamente; ambos normalizados por la diferencia entre las magnitudes. La tendencia entre los objetivos no es clara; sin embargo, la correlación que existe entre ambos es de 0.459. En caso de que los objetivos fuesen dependientes, se esperaría una alta correlación positiva. Por supuesto, esto aún no responde claramente la pregunta de si existe, o no, contraste entre los objetivos. Estas gráficas nos permiten observar el efecto del tiempo de servicio en las instancias; se muestran tres grupos completamente separados, uno para cada grupo de instancias del mismo tamaño.

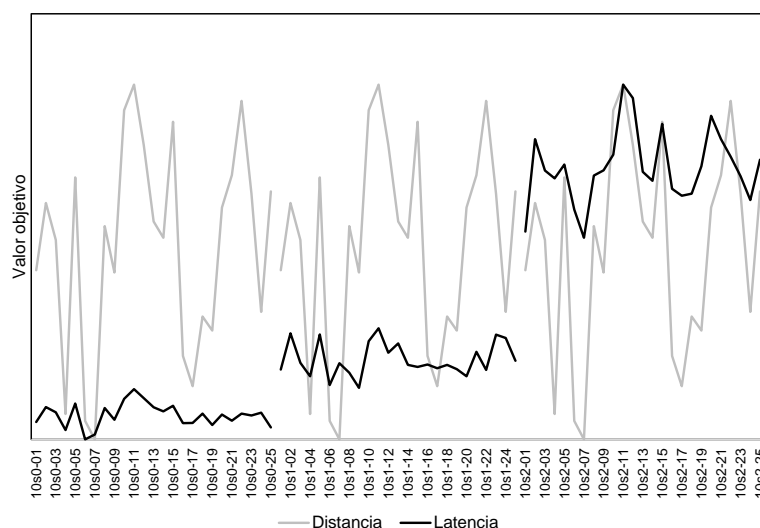


Figura 3.5. Distancia y latencia mínima de instancias de 10 clientes.

Para poder demostrar estadísticamente que el problema es monobjetivo, utilizaremos una caracterización distinta. Si tuviéramos acceso a los frentes exactos, su cardinalidad demos-

¹Los detalles de estas instancias son descritos en la Sección 5.1

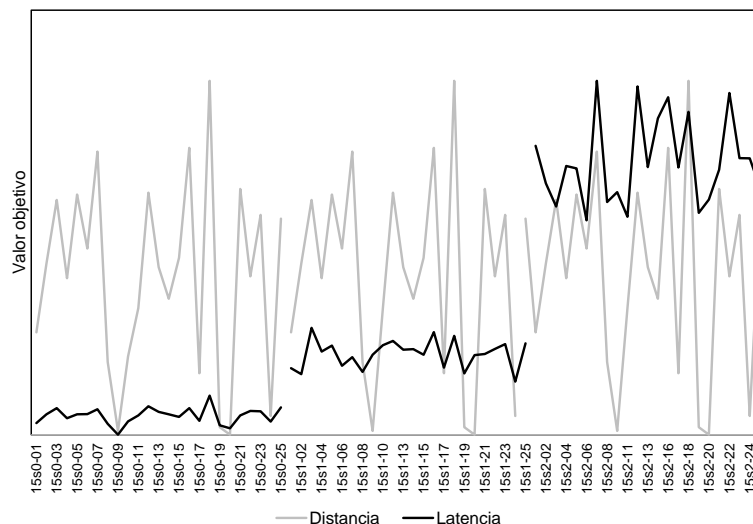


Figura 3.6. Distancia y latencia mínima de instancias de 15 clientes.

traría el conflicto entre los criterios. Esto es; en el caso monobjetivo, el frente de Pareto se reduce a una solución. Por lo tanto, si la media de la cardinalidad de nuestras instancias, difiere de uno, existe un conflicto entre los objetivos que genera al menos dos soluciones no dominadas.

Debemos recordar que no tenemos acceso completo a los frentes de Pareto; sin embargo, como las instancias son resueltas utilizando el método AUGMECON2, podemos hacer las siguientes aseveraciones:

- Cada solución encontrada pertenece al frente de Pareto.
- Si hay conflicto entre los objetivos, se encontraron al menos dos soluciones no dominadas.

Así, únicamente las instancias en las que no existe conflicto tienen cardinalidad 1. La Figura 3.7 muestra el histograma de la cardinalidad de los frentes de Pareto para las instancias resueltas. Utilizando una prueba Wilcoxon, se demuestra con un 99 % de confianza que la mediana es mayor a 1; con un valor de p de 2.2×10^{-16} y una media de 4.68. Los resultados implican el conflicto entre ambos objetivos y justifican la aplicación de las metodologías utilizadas.

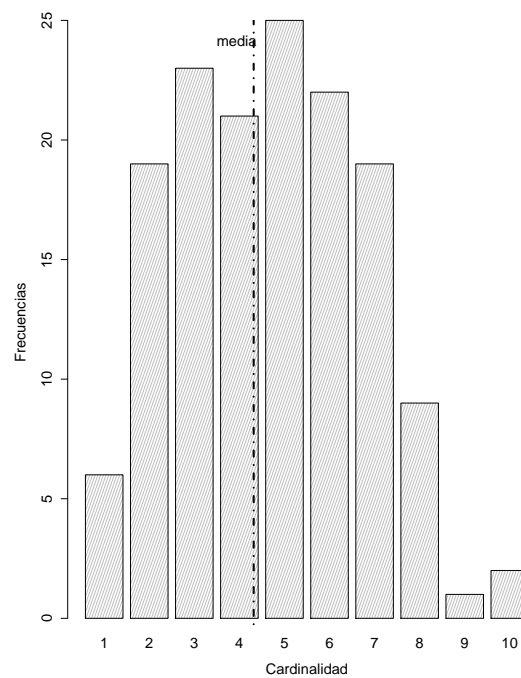


Figura 3.7. Histograma de la cardinalidad de los frentes de Pareto para instancias de 10 y 15 clientes.

Capítulo 4

Métodos de Solución

Contenidos

1. Métodos exactos	51
1.1. Suma ponderada	51
1.2. AUGMECON 2	52
2. Métodos heurísticos	53
2.1. VNS	53
2.2. NSGA-II	56
2.3. GRASP	61

Viendo por separado cada objetivo del problema de estudio y considerando capacidad del vehículo ilimitada, se identifican dos problemas categorizados como \mathcal{NP} -completos por su complejidad para resolverlos; el problema del agente viajero y el problema de mínima latencia. Al añadir una capacidad limitada al vehículo y considerar simultáneamente ambos objetivos, situamos el problema biobjetivo del agente viajero con múltiples viajes en la misma categoría; sin embargo, la prueba formal de la complejidad del problema queda fuera del alcance de esta investigación.

Utilizando las formulaciones desarrolladas podemos utilizar escalarizaciones para calcular de forma exacta, una a la vez, soluciones del frente de Pareto. Sin embargo; debemos hacer dos consideraciones importantes. La primera, ¿cómo escalarizo mi problema? en suma ponderada por ejemplo; qué pesos asigno a cada función objetivo y cuántos de ellos son necesarios. La segunda, por cada configuración de pesos tengo que resolver un problema de optimización lineal entero mixto; el tiempo requerido para encontrar la solución

óptima puede ser mucho, aún para instancias de pocos clientes.

Puesto que la investigación del problema de estudio inicia con este trabajo, necesitamos conocer parte del frente de Pareto, al menos para instancias pequeñas. Se proponen como técnicas exactas el método de la suma ponderada y AUGMECON2. Los frentes obtenidos serán utilizados como punto de referencia para el desempeño de dos metaheurísticas propuestas para resolver instancias de mayor tamaño; se presentan un algoritmo genético y una adaptación multiobjetivo del algoritmo GRASP.

1. Métodos exactos

1.1. Suma ponderada

El primer paso para buscar soluciones en el frente de Pareto fue el método clásico e intuitivo, el método de la suma ponderada. Su formulación consiste en minimizar la suma ponderada del objetivo de distancia y latencia, obteniendo una solución no dominada. Aún resolviendo este problema para cada uno de los infinitos valores de los pesos, no podríamos encontrar el frente de Pareto por completo; pues carecemos de convexidad al tratarse de un problema lineal entero mixto. Más aún, muchos pesos distintos pueden conducir a la misma solución.

Otra dificultad de este método es la necesidad de escalar las dos funciones objetivo para que las ponderaciones sean aplicables pues, la distancia y la latencia están en diferentes ordenes de magnitud. Para ello, determinamos el mínimo y máximo de cada objetivo, normalizando así sus valores mediante la transformación

$$f'(x) = \frac{f(x) - f_{\min}}{f_{\max} - f_{\min}}. \quad (4.1)$$

Note que este preprocesamiento implica la resolución de cuatro problemas. Además, no tenemos la certeza de que el punto formado por mínimo de cada función objetivo y su coordenada correspondiente en el espacio de los objetivos¹, sea una solución no dominada. La teoría tras el método de la suma ponderada asegura la estricta no dominancia solo para ponderaciones positivas. Así pues, este par de soluciones pueden ser débilmente no dominadas.

¹ $(f_1(\mathbf{x}^1), f_2(\mathbf{x}^1)), (f_1(\mathbf{x}^2), f_2(\mathbf{x}^2))$; donde $\mathbf{x}^1 = \arg\min \{f_1(\mathbf{x}) \mid \mathbf{x} \in \mathcal{X}\}$ y $\mathbf{x}^2 = \arg\min \{f_2(\mathbf{x}) \mid \mathbf{x} \in \mathcal{X}\}$

El esquema de ponderaciones utilizado es $\alpha \in \{0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5, 0.6, 0.7, 0.8, 0.9\}$. Dando lugar a nueve problemas más a resolver; estos de la forma

$$\begin{aligned} \min \quad & \alpha f'_1(x) + (1 - \alpha)f'_2(x) \\ & x \in \mathcal{X} \end{aligned}$$

En el mejor de los casos, podemos obtener nueve soluciones no dominadas y dos débilmente no dominadas; resolviendo 13 problemas.

1.2. AUGMECON 2

La segunda técnica de escalarización clásica es el método de las ε -restricciones. Además de la fuerte dependencia del esquema del parámetro ε , situación inherente a todas las técnicas de escalarización, esta metodología también puede proporcionar una misma solución con diferentes parámetros. Es de notar que es posible determinar el frente de Pareto resolviendo con todos los valores de ε , pues no depende de la geometría del problema. Sin embargo, solo ofrece certeza de que las soluciones sean débilmente no dominadas.

Bajo el esquema de ε restricciones, AUGMECON2 minimiza jerárquicamente ambos objetivos, asegurando su dominancia estricta. Además utiliza la holgura entre la cota impuesta ε y el valor objetivo secundario de la solución óptima para saltar los problemas que dirigen a una solución ya encontrada. De este modo, cada problema que se resuelve arroja una solución estrictamente no dominada distinta. Como preprocesamiento, el método requiere que los valores para ε sean acotados; al considerar sólo dos objetivos, sólo es necesario calcular el mínimo de cada objetivo (*ver Figura 2.12*).

El esquema utilizado para calcular parte del frente Pareto fue asignar 10 valores equidistantes en el rango r . El objetivo que se minimiza principalmente es el mismo en el que está basada la formulación que se utiliza para representar el problema, tal como se muestra en la Sección 3.

En el mejor de los casos obtendremos diez soluciones no dominadas, resolviendo 12 problemas.

En situaciones poco usuales, una solución óptima para distancia también es óptima para

latencia. Esto es fácilmente comprobable en el preprocesamiento de ambas metodologías; evitando resolver innecesariamente los consecuentes problemas.

2. Métodos heurísticos

Los dos procedimientos mencionados son solo aplicables para resolver instancias del problema con pocos clientes. Recordemos que cada solución no dominada se encuentra a partir de resolver de forma exacta un problema lineal entero mixto. Como alternativa se presentan dos metaheurísticas poblacionales para encontrar una aproximación al frente de Pareto; a saber, una adaptación biobjetivo del procedimiento GRASP y un algoritmo genético NSGA-II. Ambas metaheurísticas utilizan como procedimiento de mejora la metaheurística VNS, detallada a continuación.

2.1. VNS

El procedimiento VNS (Variable Neighborhood Search) propuesto por Mladenovic y Hansen [34] es una metaheurística sencilla que propone cambiar sistemáticamente de vecindarios; esto es, de conjuntos de soluciones obtenibles a partir de un cambio o movimiento en una solución, para escapar de óptimos locales. El Algoritmo 1 muestra el esquema principal del procedimiento.

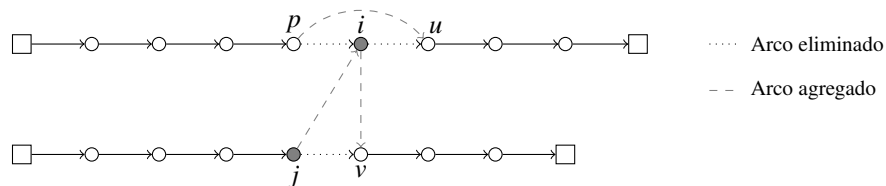
Los siguientes son los movimientos utilizados para definir las vecindades, en orden de aparición, para el VNS:

Relocalización de clientes

El i -ésimo cliente es colocado inmediatamente después del cliente j siempre que sea factible hacer la relocalización (ver Figura 4.1); la posición *a-priori* de los clientes, así como el viaje al que pertenezcan no tiene importancia para hacer el movimiento.

El impacto en la distancia de la solución al hacer una relocalización es descrito por

$$\Delta C = -(c_{pi} + c_{iu} + c_{jv}) + (c_{pu} + c_{ji} + c_{iv}). \quad (4.2)$$

Algoritmo 1: Algoritmo VNS**Entrada:** Solución inicial x Conjunto de estructuras de vecindario \mathcal{N}_k , $k = 1, \dots, k_{\text{máx}}$ Número de repeticiones num_rep **Salida** : Incumbente x **1.1 inicio****1.2 repetir****1.3** Hacer $k = 1$ **1.4 repetir****1.5** Generar aleatoriamente una solución x' en el k -ésimo vecindario de x $(x' \in \mathcal{N}(x))$ **1.6** **si** x' es mejor que el incumbente **entonces****1.7** $x = x'$ **1.8** Continuar la búsqueda con \mathcal{N}_1 ($k = 1$)**1.9** **en otro caso****1.10** Hacer $k = k + 1$ **1.11** **hasta que** $k = k_{\text{máx}}$ **1.12** **hasta que** se completen num_rep iteracionesFigura 4.1. Relocalización del cliente i inmediatamente después del cliente j

En el caso del objetivo de latencia, el calculo depende de la posición relativa de los clientes i y j

$$\Delta L = l_j - l_i + c_{ji} + s_j + \begin{cases} \alpha(n-r_j-1) + \beta(n-r_i) & \text{si } r_i > r_j \\ \alpha(n-r_j) + \beta(n-r_i+1) & \text{si } r_i < r_j \end{cases}, \quad (4.3)$$

donde

$$\alpha = (-c_{jv} + c_{ji} + s_i + c_{iv})$$

$$\beta = (-c_{pi} - s_i - c_{iu} + c_{pu})$$

Intercambio de clientes

Dos clientes i y j intercambian sus posiciones siempre que sea factible; es necesario que los clientes pertenezcan a viajes distintos. La Figura 4.2 ilustra el intercambio; sin perdida de generalidad suponemos que $r_i < r_j$. El impacto de un intercambio para distancia y latencia, respectivamente, esta descrito por

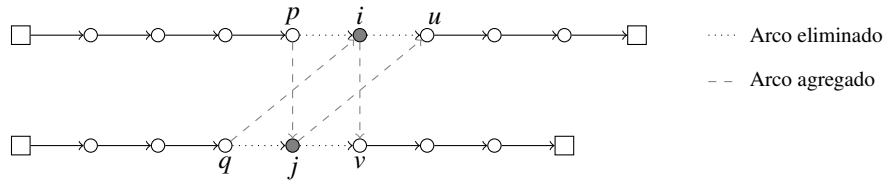


Figura 4.2. Intercambio de posición entre los clientes i y j .

$$\Delta C = -c_{pi} - c_{iu} - c_{qj} - c_{jv} + c_{pj} + c_{ju} + c_{qi} + c_{iv} \quad (4.4)$$

$$\begin{aligned} \Delta L = & (-c_{pi} - s_i - c_{iu} + c_{pj} + s_j + c_{ju})(n-r_i) + \\ & (-c_{qj} - s_j - c_{jv} + c_{qi} + s_i + c_{iv})(n-r_j) - c_{pi} - c_{qj} + c_{qi} + c_{pj} \end{aligned} \quad (4.5)$$

Permutación inter-viajes

En el MLP, el objetivo de latencia es altamente sensible a la posición que los clientes ocupan en la ruta; al considerar múltiples viajes para el vehículo, el orden de éstos últimos afecta de igual manera al valor objetivo. Dado que se conoce la forma de calcular el

aporte de cada viaje en la latencia total, podemos calcular el valor objetivo para cada permutación en $O(R)$, almacenando la información necesaria. Por tanto, dada una solución, determinar la permutación de viajes de menor latencia es posible revisando todas las posibilidades. Aunque puede parecer un número excesivo, la cantidad necesaria de viajes de una solución es pequeña respecto al número de clientes, lo que lo hace un calculo factible.

Inversión intra-viaje

Si la matriz C es simétrica, entonces el cambio en el valor de la latencia por reflejar el I -ésimo viaje de la ruta; esto es, visitar en el sentido inverso a sus clientes, está dado por

$$C^I(|I| + 2) - 2L^I + S^I \quad (4.6)$$

Además, si varios viajes se reflejan el cambio total es la suma de los cambios de cada viaje, por lo tanto, este calculo es realizado rápidamente.

2.2. NSGA-II

El algoritmo NSGA-II(Non-dominated Sorting Genetic Algorithm, versión II) fue presentado por K. Deb y otros en el año 2000[44]. Surgió como una versión mejorada del algoritmo NSGA desarrollado por Srinivas y Deb en 1994[49], de quién heredó su estructura principal, pero incluyendo características distintivas para resolver tres aspectos fuertemente criticados en la comunidad de investigadores sobre el NSGA: la jerarquía de Pareto, la ausencia de elitismo y la dependencia del parámetro σ para aplicar la técnica de aptitud compartida.

Las características principales del algoritmo NSGA-II abarcan:

- El ordenamiento no dominado elitista mediante una técnica de comparación que utiliza una subpoblación auxiliar, que le permite disminuir la complejidad de los chequeos de dominancia. Realiza una clasificación por frentes. Los individuos que pertenecen al primer frente son los no dominados; los que pertenecen al segundo son los no dominados en ausencia del frente anterior y así sucesivamente. A cada individuo se le asigna un rango equivalente a su nivel de no dominancia. Los mejores

individuos son los que tienen rangos menores. El algoritmo utilizado para clasificar las soluciones es conocido como algoritmo de rápido ordenamiento de soluciones no dominadas (fast nondominated sorting algorithm).

- Incorpora el cálculo de una distancia de hacinamiento (crowding) como el operador utilizado para mantener la diversidad de la población, con el fin de evitar el uso del σ en el reparto de aptitud.

Algoritmo 2: Algoritmo NSGA-II

Entrada: Tamaño de población N

Número de generaciones G

Probabilidad de cruzamiento P_c

Probabilidad de mutación P_m

Salida : Población P_t

2.1 inicio

2.2 Generar una población inicial P_0 de tamaño N .

2.3 Hacer $t = 0$.

2.4 mientras $t \leq G$ hacer

2.5 Seleccionar los padres de P_t .

2.6 Aplicar cruzamiento y mutación de acuerdo a P_m y P_c para crear una nueva población Q_t de tamaño N .

2.7 Hacer $R_t = P_t \cup Q_t$.

2.8 Identificar los frentes no dominados F_1, F_2, \dots, F_k de R_t , utilizando el algoritmo de rápido ordenamiento no dominado.

2.9 Crear la siguiente población P_{t+1} como sigue:

2.10 para $i = 1 : k$ hacer

2.11 **si** $|P_{t+1}| + |F_i| \leq N$ **entonces**

2.12 $P_{t+1} = P_{t+1} \cup F_i$

2.13 **en otro caso**

2.14 Agregar las $N - |P_{t+1}|$ soluciones con menor distancia de hacinamiento del frente F_i a P_{t+1} .

2.15 Hacer $t = t + 1$.

Note que cuando la población combinada de los padres e hijos tiene mas de N soluciones, el algoritmo se comporta como un AG elitista donde solamente las soluciones no dominadas participan en la selección. En esta estrategia, el tamaño de la población es un parámetro importante dado que no se utiliza una población externa para almacenar las soluciones no dominadas descubiertas. El Algoritmo 2 muestra el esquema básico del algoritmo genetico NSGA-II.

Población inicial

La idea general tras la construcción de las soluciones es proporcionar suficiente diversidad para poder generar una población que represente adecuadamente el espacio de búsqueda. En principio, no se considera la restricción de capacidad del vehiculo y se genera aleatoriamente una permutación de visita de los clientes, cual si fuése un TSP. Después, se parte esta permutación en viajes factibles, asignando pesos a cada posible viaje y resolviendo un problema del camino más corto para determinar, para la permutación especifica, la partición óptima. El peso que se asigna al I -ésimo viaje de la ruta depende exclusivamente del aporte que tiene en la latencia total; este valor puede ser calculado mediante la siguiente ecuación:

$$L^I + \left(n - \left| \bigcup_{K=1}^I K \right| - 1 \right) C^I \quad (4.7)$$

Observe como el aporte en la latencia del viaje depende de su posición en la ruta; un detalle prescindible en el problema de ruteo de varios vehículos con objetivo de latencia.

Selección

La selección es lo mas importante dentro de un AG ya que permite preservar las mejores soluciones.

Puesto que se trata de imitar lo que ocurre en la naturaleza, se ha de otorgar un mayor número de oportunidades de reproducción a los individuos más aptos. Por lo tanto la selección de un individuo estará relacionada con su valor de aptitud. Sin embargo; no se debe eliminar por completo las opciones de reproducción de los individuos menos aptos, pues en pocas generaciones la población se volvería homogénea.

En ciertas ocasiones puede suceder que tras el proceso de selección se pierda el individuo con mejor adaptación. Para evitarlo, utilizamos un método de selección por torneo binario. La idea del método es seleccionar dos individuos y comparar su aptitud(o hacerlos competir); seleccionando solo al mejor de ellos. Haciendo competir a todos los individuos podemos asegurar que el mejor individuo fue seleccionado.

Una vez que la selección ha elegido a los individuos aptos, éstos deben ser alterados aleatoriamente con la esperanza de mejorar su aptitud para la siguiente generación. Existen dos estrategias básicas para llevar esto a cabo, la mutación y el cruzamiento o reproducción.

Cruzamiento

Implica elegir a dos individuos para que intercambien segmentos de su código genético, produciendo una “descendencia” artificial cuyos individuos son combinaciones de sus padres. Este proceso pretende simular el proceso análogo de la recombinación que se da en los cromosomas durante la reproducción sexual.

Al compartir las características buenas de dos individuos, la progenie, o al menos parte de ella debería tener una adaptación mayor que cada uno de los padres. Si el cruce no agrupa las mejores características y la descendencia tiene un peor ajuste que los padres, muy probablemente será eliminado en el método de selección.

La Figura 4.3 ejemplifica el cruzamiento utilizado. Dadas dos soluciones se hace un cruzamiento por un punto únicamente para la secuencia de visita de los clientes; es decir, sin tomar en cuenta los regresos al depósito. Un bloque de un padre es heredado completo al hijo, mientras que el bloque opuesto del segundo padre es añadido evitando repeticiones. Después, los clientes que no han sido agregados son colocados justo después de su vecino más cercano. En este punto, se cuenta con una secuencia de visita a los clientes que no toma en cuenta la capacidad del vehículo; para hacer la partición se utiliza la misma idea que el algoritmo constructivo.

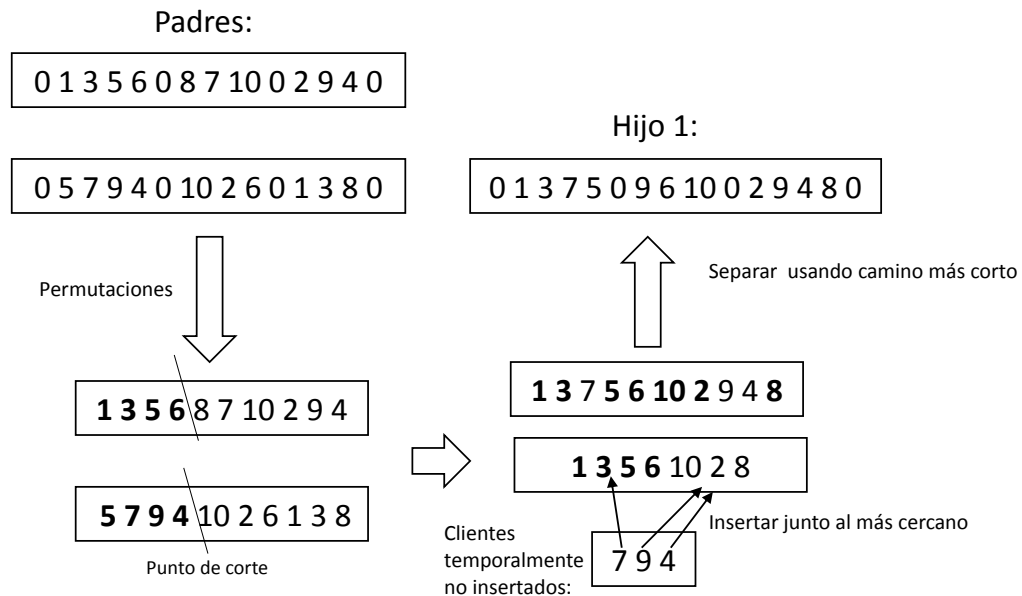


Figura 4.3. Ejemplo del cruzamiento utilizado, cada cliente es representado por un identificador y el depósito por el 0.

Mutación

Al igual que una mutación en los seres vivos cambia un gen por otro, una mutación en un algoritmo genético también causa alteraciones en un individuo. Si nos referimos en términos de evolución, la mutación se manifiesta de forma extraordinaria, nada común. Las mutaciones suelen ser en promedio beneficiosas pues contribuyen a la diversidad genética de la especie.

En este caso la mutación es realizada por un procedimiento de mejora a cargo del algoritmo VNS. Desde el punto de vista multiobjetivo, si se realiza una mejora en un objetivo, el segundo no tiene porque verse beneficiado; en este sentido, se proporciona diversidad a la población.

De acuerdo a la probabilidad de mutación, P_m , una solución puede mejorar en distancia o en latencia aleatoriamente. Sin embargo, los movimientos permiten mejorar un objetivo sin perjudicar el segundo en muchos de los casos pues se utiliza como medida de desempeño la función

$$\text{mín } F(x) = f_1(x) - \mu f_2(x), \quad \mu \in [10^{-6}, 10^{-3}]$$

optimizando jerárquicamente los objetivos; en este caso f_1 representa la dirección princi-

pal de mejora seleccionada (distancia o latencia).

Introducción de nuevos individuos

Nuestro esquema maneja un criterio de paro para introducir nuevos individuos a la población que no necesariamente pueden aparecer vía el cruzamiento. La idea básica es generar un conjunto de soluciones a partir de un solución como semilla. Este algoritmo será denominado VNS biobjetivo, pues va almacenando todas las soluciones que son obtenidas mediante un movimiento de mejora para un objetivo en específico. Puesto que al mejorar en un objetivo, el otro se deteriora, todas las soluciones generadas son no dominadas entre sí.

Si una solución semilla se encuentra sobre el frente de Pareto, probablemente algunas de las soluciones generadas se encuentren también sobre él. Este procedimiento no es costoso y proporciona diversidad a la población; además acelera la convergencia dependiendo de la calidad de la semilla.

Así, un nuevo parámetro es introducido al esquema general del algoritmo genético: ¿cuándo introducir las nuevas soluciones a la población? Se detiene el algoritmo en la σG -ésima generación, con $\sigma \in [0, 1]$. Se aplica VNS biobjetivo a cada individuo de la población en ambos objetivos, se seleccionan las soluciones no dominadas de entre todas las generadas, se agregan a la población P y se continua normalmente para las restantes $(1 - \sigma)G$ generaciones.

2.3. GRASP

El algoritmo GRASP (Greedy Randomized Adaptive Search Procedure) fue presentado por Feo y Resende [50] en 1995. Su idea es construir iterativamente una solución, un elemento a la vez, seleccionando al azar un elemento de una lista de posibles candidatos construida dependiendo de la solución parcial actual. La segunda fase es aplicar un procedimiento de mejora a la solución. Este proceso se repite hasta que se cumpla un criterio de paro y se almacena el incumbente. El Algoritmo 3 muestra el esquema principal de la metaheurística.

Algoritmo 3: Algoritmo GRASP**Entrada:** Esquema de lista restringida de candidatos (LRC)**Salida :** Incumbente x

```

3.1 inicio
3.2   repetir
3.3     Hacer  $x' = \{\}$ 
3.4     mientras  $x'$  este incompleta hacer
3.5       Hacer LRC dependiendo de la solución actual
3.6       Seleccionar aleatoriamente  $s$  de LRC
3.7       Hacer  $x' = x' \cup s$ 
3.8     Aplicar procedimiento de mejora a  $x'$ 
3.9     si  $x'$  es mejor que el incumbente entonces
3.10      Hacer  $x = x'$ 
3.11   hasta que se cumpla criterio de paro

```

Esta metaheurística no es aplicable directamente para optimización multiobjetivo pues entrega una solución por ejecución. Sin embargo; es fácilmente adaptarlo al esquema de un algoritmo poblacional [51, 52]. La idea de nuestra metaheurística es conservar la población de soluciones generadas por una ejecución de GRASP y guiarla en un objetivo específico resolviendo el problema (2.47) del método AUGMECON2 para lograr que algunos individuos pertenezcan al frente; éste último será guardado por separado.

Enfoque multiobjetivo

La principal desventaja de AUGMECON2 es que no siempre se sabe la cantidad necesaria de valores de ε que se deben de considerar para obtener el frente de Pareto. Sin embargo; si tanto la matriz de tiempos de traslado como los tiempos de servicio son enteros, los valores de latencia y distancia lo serán también. Por tanto, el mínimo tamaño de paso para ε es 1; permitiendo encontrar, si se resuelve a optimalidad (2.47), el frente Pareto por completo.

En el enfoque heurístico, cada solución de la población será mejorada por el procedi-

miento VNS, en un intento de resolver el problema de AUGMECON2 para un valor de ε específico. La mejor solución es almacenada en el archivo y solo se conservan en la población las soluciones factibles; es decir, aquellas cuyo valor objetivo secundario es menor que ε . Se inicia ε en un valor suficientemente grande; al ir disminuyendo y pasar su cota inferior, la población será vacía y el algoritmo termina. El algoritmo 4 muestra el esquema del procedimiento GRASP utilizado para un problema en el que se minimizan dos objetivos.

Algoritmo 4: Algoritmo GRASP Bi-objetivo

Entrada: Tamaño inicial de la población

Objetivo primario y secundario

Salida : Archivo Frente de Pareto \mathcal{F}

4.1 inicio

4.2 Inicializar población $P = \emptyset$

4.3 **mientras** *no se tenga una población completa* **hacer**

4.4 Generar una permutación aleatoria de clientes

4.5 Separar la secuencia en viajes factibles usando algoritmo de camino más corto

4.6 Agregar solución creada a la población P

4.7 Aplicar VNS a cada individuo de P usando como medida de desempeño el objetivo secundario $f_2(\cdot)$

4.8 Inicializar $\varepsilon = \infty$

4.9 **mientras** $P \neq \emptyset$ **hacer**

4.10 Aplicar VNS a cada individuo de P usando como medida de desempeño $f_1(x) - \mu(\varepsilon - f_2(x))$, con $\mu \in [10^{-6}, 10^{-3}]$, $x \in P$

4.11 Seleccionar el mejor individuo $\hat{x} \in P$ y almacenarlo en \mathcal{F}

4.12 Generar un conjunto de soluciones no dominadas a partir de \hat{x} con el procedimiento VNS biobjetivo usando el objetivo secundario y agregarlas a P

4.13 Eliminar de P los individuos infactibles ($x \in P \mid f_2(x) > \varepsilon$)

4.14 Actualizar $\varepsilon = f_2(\hat{x}) - 1$

Sobre la calidad del frente obtenido

Es fácil notar que una permutación de viajes o inversiones de algunos de ellos no alteran la distancia de la ruta (ver secciones 1.12 y 1.12), por lo que contamos con al menos $n!$ ² soluciones con igual distancia pero latencia distinta. En concordancia con la teoría de optimización multiobjetivo, tenemos un gran número de soluciones débilmente no dominadas; situación que debilita el buen funcionamiento de algoritmos exactos como es el caso del método de las ε -restricciones.

Vía esta observación, las estructuras de vecindario permutación inter-viajes y reflexión intra-viaje, son de gran utilidad aunque el objetivo primario del VNS sea distancia; logrando que el valor de la latencia disminuya y se aleje lo más posible del valor de ε . Para aprovechar esta característica del problema, decidimos minimizar como objetivo primario la distancia de la solución.

Este esquema nos permite aproximarnos a la solución de un enfoque lexicográfico de nuestro problema, bajo la condición del método de las ε -restricciones. Por tanto, la solución que obtenemos para cada valor de ε se aproxima a una solución perteneciente al frente de Pareto.

Capítulo 5

Experimentación Computacional

Contenidos

1.	Descripción de las instancias	66
2.	Métricas de desempeño	66
3.	Frentes de Pareto exactos	67
3.1.	Comparación de métodos exactos	67
3.2.	¿Cuál formulación es la indicada?	69
3.3.	Partiendo de una solución inicial...	70
3.4.	Alcance de AUGMECON2	71
4.	Metaheurísticas	72
4.1.	Ajuste de parámetros para GRASP	72
4.2.	Ajuste de parámetros para NSGA-II	74
4.3.	Comparación del algoritmo GRASP y el NSGA-II	82
4.4.	Eficacia de las metaheurísticas	82

El estudio del problema biobjetivo del agente viajero con múltiples viajes inicia en esta investigación. Sin embargo, se tiene como punto de partida las investigaciones desarrolladas para cada objetivo por separado. Por un lado, el método exacto desarrollado por Azi et al [27, 28] para el objetivo de distancia y, las formulaciones y métodos heurísticos implementados por Martinez et al [2] para el objetivo de latencia.

Tanto las formulaciones al problema como las metodologías de solución desarrolladas en

esta tesis deben ser comparadas y evaluadas. En este capítulo se presentan las observaciones y deducciones estadísticas que resultan de:

- Determinar la metodología exacta que proporciona un frente de mejor calidad; esto es suma ponderada o AUGMECON2.
- Decidir cuál es la formulación que permite encontrar un frente de Pareto más rápidamente; la formulación basada en distancia o basada latencia.
- Comparar los algoritmos heurísticos implementados, GRASP y NSGA-II, en base a la calidad del frente que obtienen.
- Validar la eficacia de los heurísticos contra su contraparte exacta.

1. Descripción de las instancias

Las instancias utilizadas fueron tomadas de Martinez et al. [2]. Se utilizan instancias de 10, 15, 20 y 40 clientes cuyas posiciones en coordenadas fueron generadas uniformemente entre 0 y 100. Los tiempos de traslado son las distancias euclidianas redondeadas entre los clientes. Dependiendo el tamaño de la instancia, la capacidad del vehículo es 120, 120, 140 y 210. Las demandas fueron asignadas aleatoriamente con un valor de 10, 20 o 30. Hay tres grupos de 25 instancias para cada número de clientes, se diferencian por la asignación del tiempo de servicio y se denotan por s_0 , s_1 y s_2 respectivamente; el primero los tiempos de servicio son iguales para todos los clientes; el segundo, los tiempos de servicio fueron generados uniformemente entre 0 y 100; el tercero entre 50 y 200. En total, se cuentan con 75 instancias para cada valor de n .

2. Métricas de desempeño

Puesto que la solución a nuestro problema; es decir, el frente Pareto, es un conjunto, no existe una métrica que pueda determinar por si sola la calidad de la solución. A priori, puede buscarse un conjunto lo más grande posible; sin embargo, es preferible tener una idea de que tan dominantes son los elementos del frente. Por ejemplo, conocer la probabilidad de que exista una solución no dominada fuera del frente o comparar entre dos

soluciones cual tiene mayor porcentaje de soluciones no dominadas. Las métricas que utilizaremos como medida de desempeño son:

- **Cardinalidad del frente.** Número de puntos que conforman el frente encontrado por el algoritmo. Entre mas soluciones formen parte de nuestro frente se tiene una mayor diversidad de soluciones.
- **Hipervolumen.** Se define como el área dominada por el frente encontrado respecto a un punto de referencia[53]. Para efectos de comparación entre las diferentes instancias, se normalizan los frentes y se calcula el hipervolumen con el mismo punto de referencia; esto es con el punto $(1,1)$. De este modo, si el hipervolumen se acerca a 1, mayor es el área dominada por el frente de Pareto, por lo que la probabilidad de que exista una solución no dominada fuera del frente es escasa. En caso de ser 1, el frente de Pareto es un conjunto monoelemento formado por el punto ideal. Por construcción, aquellos frentes que tengan hipervolumen de 0 tienen cardinalidad dos.

3. Frentes de Pareto exactos

Para evaluar el desempeño de los algoritmos heurísticos es necesario contar con una referencia de soluciones obtenidas de forma exacta. Recuerde que solo un subconjunto del frente puede ser obtenido a partir de las escalarizaciones utilizadas; a saber suma ponderada y AUGMECON2. Cada configuración de parámetros para los métodos exactos implica resolver un problema de optimización lineal entero. Cada problema es resuelto a optimalidad utilizando CPLEX 12.6 en una máquina con procesador Intel Xeon 3.4GHz con 16 GB de memoria RAM y sistema operativo Windows x64; en caso de que la optimalidad de un problema no fuese alcanzada en un tiempo límite de 2 días, se considera como **no resuelta**.

3.1. Comparación de métodos exactos

Para medir la calidad del frente obtenido por ambas escalarizaciones es importante considerar la cardinalidad y el tiempo de computo utilizado. Como es sabido, el tiempo de

computo necesario para encontrar la solución óptima de una escalarización crece exponencialmente con el tamaño de la instancia. Para comparar la efectividad de los métodos exactos se utilizaron las 75 instancias de 10 clientes. El tiempo en que el optimizador determina la solución óptima es variable, por tanto se realizaron tres réplicas para medir más apropiadamente la variación. La Tabla A.1 muestra el tiempo promedio de computo utilizado y la cardinalidad de los frentes obtenidos para los dos métodos exactos.

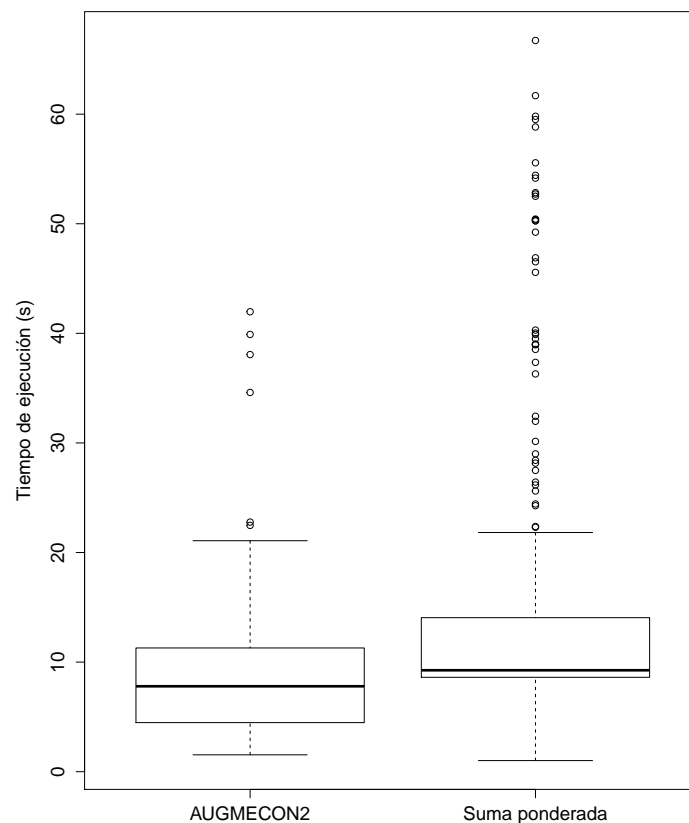


Figura 5.1. Caja de bigotes para los tiempos de computo de AUGMECON2 contra suma ponderada.

La Figura 5.1 muestra el diagrama de bigotes de los tiempos de computo utilizados por los dos métodos. Note como el método AUGMECON2 además de tener una mediana menor, también muestra un comportamiento mas estable al tener menos datos atípicos. Formalmente, se realizó la prueba de Wilcoxon¹ mostrando estadísticamente que existe

¹Toda prueba estadística utilizada en esta investigación es no paramétrica(a menos que se indique lo contrario). Los datos obtenidos incumplen los supuestos de normalidad, hecho comprobado una prueba de Shapiro-Wilk con una significancia de 0.01.

diferencia entre las medianas de ambas escalarizaciones con 99.9 % de confianza; el valor de p obtenido es de 5.57×10^{-97} . La mediana del tiempo de ejecución es de 7.792 para AUGMECON2 contra 9.254 en suma ponderada.

De igual forma, la cardinalidad de los frentes obtenidos por AUGMECON2 es mayor a los de suma ponderada, como puede verse en la Figura 5.2. Estadísticamente, con un 99.9 % de confianza, decimos que hay diferencia significativa entre las medianas del número de soluciones en el frente; esto realizando una prueba de Wilcoxon con un valor p de 4.09×10^{-6} . Las mediana del número de soluciones en el frente es de 4 para AUGMECON2 y 3 para suma ponderada.

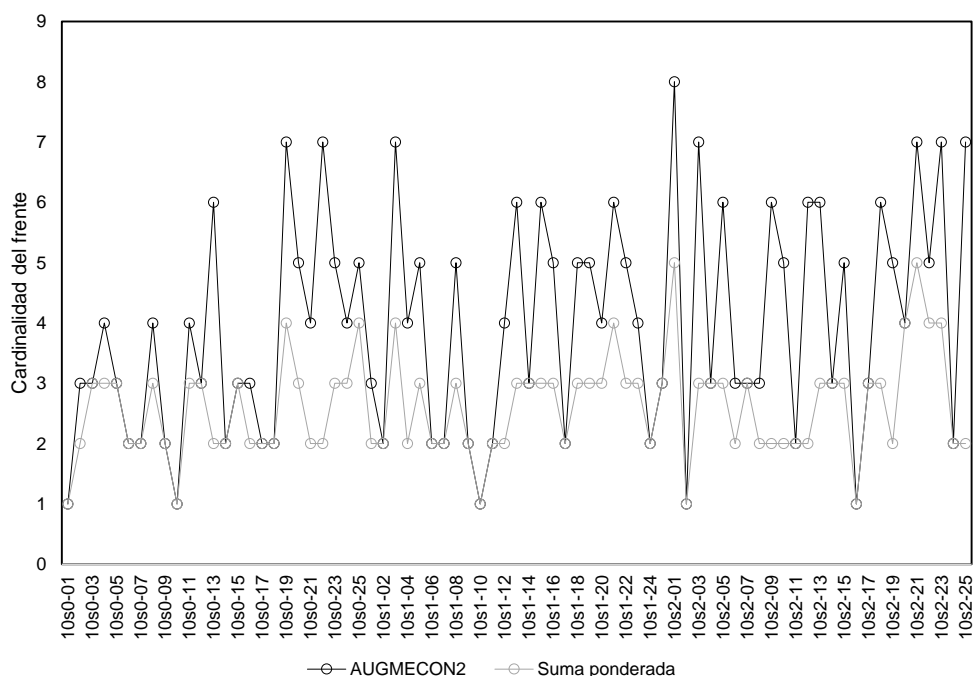


Figura 5.2. Cardinalidad de los frentes obtenidos por AUGMECON2 y suma ponderada.

En resumen, el método AUGMECON2 proporciona frentes de mayor cardinalidad en menor tiempo. Vía estas observaciones, sólo se utilizará esta metodología para calcular los frentes utilizados como referencia para evaluar los heurísticos.

3.2. ¿Cuál formulación es la indicada?

Cada solución no dominada es obtenida resolviendo un MLP para una configuración específica de la escalarización utilizada. Es sabido que una adecuada formulación de un

problema puede ayudar a que un método exacto determine la solución óptima. En el caso de AUGMECON2, una función objetivo es añadida al modelo como restricción y la otra, aquella en la cual esta basada la formulación, es minimizada. La idea de tras de esto es evitar optimizar el objetivo más complicado del modelo enviándolo a las restricciones.

En este trabajo se desarrolló una formulación basada en el objetivo de distancia y otra en latencia. Para decidir cuál es la formulación más adecuada para este problema utilizando AUGMECON2 se realizó experimentación sobre el primer grupo de 25 instancias de 10 clientes; esto es, sobre aquellas en las que no importa el tiempo de servicio. Los tiempos de computo utilizados para cada formulación aparecen en la Tabla A.2

El frente obtenido debe ser el mismo para las dos formulaciones pero el tiempo de computo necesario para calcularlo no. La formulación basada en la distancia resulta ser mas lenta con un tiempo medio en segundos de 5.009 horas contra 8.093 segundos para el caso de latencia. Además, dos de las instancias no fueron resueltas por la formulación basada en distancia; es decir, el calculo del óptimo para los objetivos, como inicio de AUGMECON2, no pudo ser realizado en un tiempo de 2 días, estas instancias fueron marcadas con un * en el desglose de la experimentación.

Por formalidad se realizó una prueba de Wilcoxon para demostrar la diferencia estadística entre las medianas, obteniendo un valor p de 2.42×10^{-13} . De este modo, la formulación basada en latencia demostró ser la que, bajo el método AUGMECON2, proporciona los frentes de Pareto más rápidamente.

3.3. Partiendo de una solución inicial...

Por último, se realizó una prueba para saber el impacto que una solución inicial tiene en el tiempo utilizado para encontrar la solución óptima de un problema. Utilizando la formulación basada en latencia se proporcionó una solución inicial, generada con el constructivo de NSGA-II, de la menor distancia posible. AUGMECON2 determina el óptimo de distancia ayudado por esta solución; después cada solución no dominada es utilizada como solución inicial para una iteración posterior del método.

Con un valor p de 2.62×10^{-99} bajo una prueba de Wilcoxon se demuestra diferencia,

con una significancia de 0.001, entre las medianas. Decantando por aquellas en las que se parte de una solución inicial. La Figura 5.3 muestra el diagrama de bigotes de este experimento.

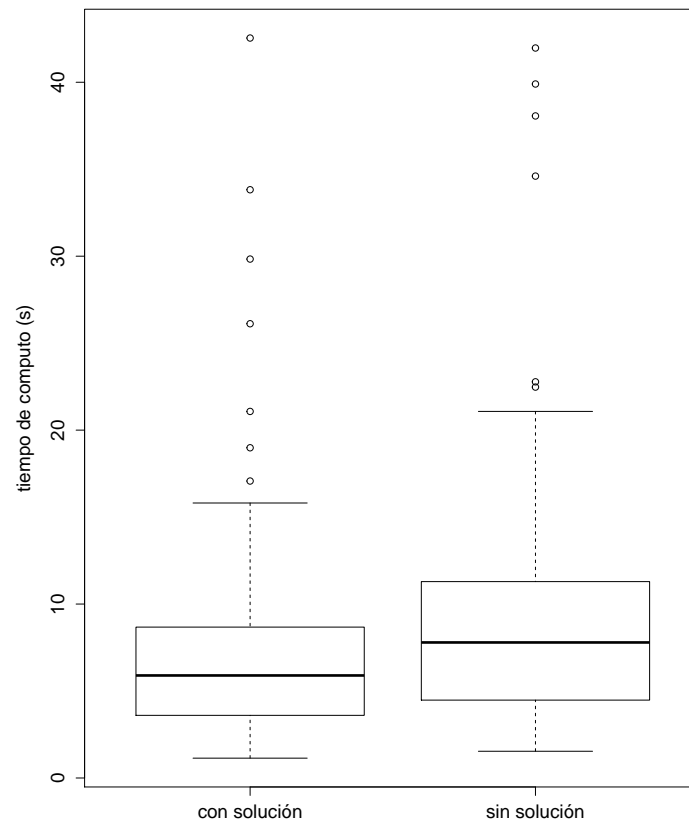


Figura 5.3. Gráfica de bigotes para los tiempos de cómputo de AUGMECON2 bajo el modelo basado en latencia utilizando, o no, una solución inicial.

3.4. Alcance de AUGMECON2

Bajo la restricción de que cada problema de AUGMECON2, tenía como límite 2 días para ser resuelto a optimalidad; se resolvieron todas las instancias de 10 y 15 clientes. Esto es, 150 instancias en total. Problemas de mayor cantidad de clientes excedían el tiempo límite impuesto.

El Apéndice B muestra los frentes para instancias de 10 y 15 clientes.

4. Metaheurísticas

Ante la incapacidad de resolver instancias de un mayor número de clientes vía un método exacto, se propusieron dos algoritmos metaheurísticos como alternativa de solución; un algoritmo genético NSGA-II y una adaptación multiobjetivo del algoritmo GRASP. Ambos procedimientos fueron probados en la misma máquina en la que se determinaron los frentes exactos.

Como es sabido, todo procedimiento metaheurístico es sensible a los valores de sus parámetros. Para hacer un adecuado ajuste de los valores que permiten al algoritmo proporcionar las soluciones de mejor calidad, y en segundo término en el menor tiempo posible, se realizó experimentación computacional sobre diversas configuraciones de parámetros. Los posibles valores de los parámetros fueron asignados de forma empírica según el comportamiento observado en experimentación previa.

4.1. Ajuste de parámetros para GRASP

El algoritmo GRASP que implementamos tiene únicamente como parámetro el tamaño de la población inicial; es de esperar que a medida que esta sea más grande, la búsqueda local que se hace enbebida en AUGMECON2 conducirá a soluciones distintas. Por supuesto, esto implica un mayor esfuerzo computacional. Por otra parte, también la cantidad de iteraciones del algoritmo VNS, utilizado como procedimiento de mejora, debe ser calibrada. El número de iteraciones aquí seleccionadas también serán utilizadas para el algoritmo NSGA-II. Decidió hacerse por separado para no agregar un parámetro más al algoritmo genético.

Para calibrar los parámetros anteriores se utiliza un diseño factorial sobre un grupo de 10 instancias por cada número de clientes. Es de esperar que a medida que aumenta el tiempo de servicio de los clientes, el valor de la latencia aumenta separándose de la distancia total de la solución; por tal motivo, las instancias seleccionadas pertenecen al grupo generado con mayores tiempos de servicio. Para cada configuración se realizaron tres réplicas y se calculó la cardinalidad e hipervolumen de los frentes obtenidos y el tiempo de computo

requerido.

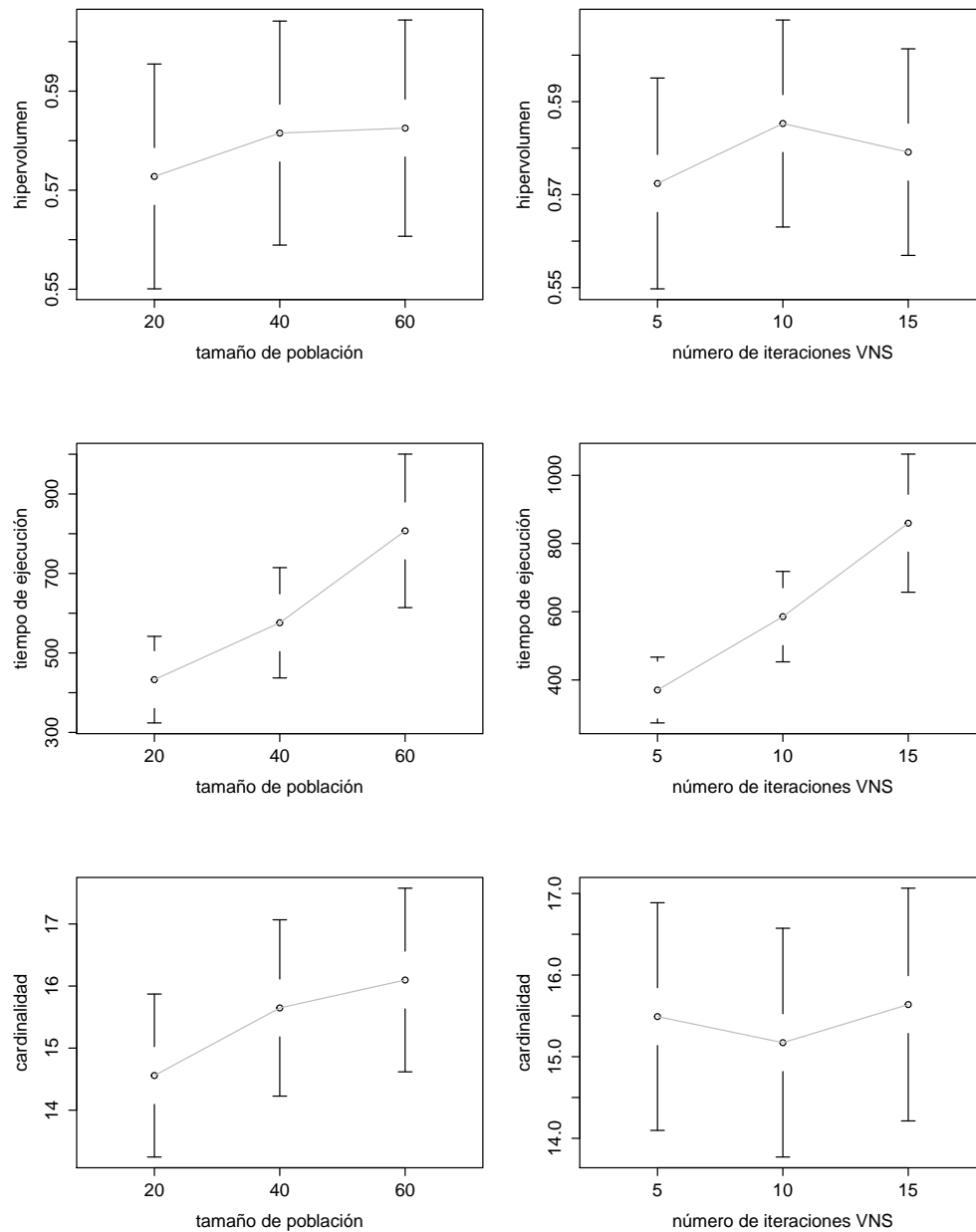


Figura 5.4. Gráficas de medias para los parámetros de GRASP

Se realizó una prueba de Friedman para determinar que existe diferencia significativa en el efecto de los tratamientos sobre el hipervolumen, esto con una significancia de 0.001. Después, se procedió a realizar una prueba de Wilcoxon para determinar entre cada pareja de tratamientos si existe diferencia significativa, de entre aquellos en la que existe se guarda el mejor valor de la mediana y se selecciona la mejor configuración, resultando aquella con un tamaño de población de 20 individuos y haciendo 10 iteraciones para

VNS.

Del mismo modo, determinamos las mejores configuraciones para la cardinalidad del frente obtenido y el tiempo de ejecución. La Tabla 5.1 muestra las mejores configuraciones para las tres medidas de desempeño

Medidas de desempeño			
Factores	hipervolumen	cardinalidad	tiempo de ejecución
Tamaño de la población	20	40	20
Número de iteraciones VNS	10	5	5

Tabla 5.1. Mejores configuraciones obtenidas por pruebas no paramétricas para GRASP.

A pesar de que la cardinalidad del frente incrementa con una población de 40 individuos, la probabilidad de que existan soluciones que dominen a alguna del frente no disminuye. Por tanto, seleccionamos como tamaño de población 20 individuos. Respecto a la cantidad de iteraciones para VNS, a pesar de que 10 iteraciones producen mejor valor para el hipervolumen, es una diferencia de dos centésimas respecto al nivel menor; mientras que si realizamos sólo 5 iteraciones tenemos una disminución de cerca de 200 segundos en el tiempo de ejecución. Por tanto, decidimos utilizar 5 iteraciones para VNS, tanto para GRASP como para NSGA-II.

La Figura 5.1 las gráficas de medias para ambos factores en las tres medidas de desempeño. De forma ilustrativa esta gráfica muestra el comportamiento del fenómeno en cada caso; sin embargo recuerde que las conclusiones solo pueden ser hechas a partir de las medianas en el caso no paramétrico.

En conclusión la mejor configuración para GRASP consta de 20 individuos en la población inicial y 5 iteraciones para VNS.

4.2. Ajuste de parámetros para NSGA-II

El esquema del algoritmo genético utilizado utiliza los cinco parámetros siguientes:

- Tamaño de la población (N). Este parámetro nos indica el número de individuos

que tenemos en nuestra población para una generación determinada. En caso de que esta medida sea insuficiente, el algoritmo genético tiene pocas posibilidades de realizar reproducciones con lo que se realizaría una búsqueda de soluciones escasa. Por otro lado si la población es excesiva, el algoritmo será demasiado lento.

- Número máximo de generaciones (G). Representa la cantidad de veces que se ejecutará el algoritmo. Si G es pequeño, la población no podrá diversificarse y si es demasiado grande, puede ocurrir deriva genética.
- Probabilidad de cruzamiento (P_c). Indica la frecuencia con la que se producen las cruas entre los individuos seleccionados.
- Probabilidad de mutación (P_m). Nos indica la frecuencia con la que un individuo muta, en este caso es mejorado. Si no hay mutación, los descendientes son los mismos que había tras la reproducción. Una valor alto de P_m puede producir una convergencia prematura.
- Introducción de individuos (σ). Indica el momento en la evolución en que serán introducidos nuevos individuos.

El esquema del diseño experimental es el mismo que el utilizado para el ajuste de parámetros del GRASP. La Tabla 5.2 muestra los valores de los niveles utilizados en este experimento.

Factores	Niveles		
Tamaño de la población	10	20	40
Número de generaciones	20	40	60
Probabilidad de cruzamiento	0.5	0.75	1
Probabilidad de mutación	0.25	0.5	0.75
Introducción de individuos	0.5	0.75	1

Tabla 5.2. Niveles del ajuste de parámetros para NSGA-II.

Prueba de Friedman

Por formalidad, se realizó una prueba de Friedman para verificar que existe diferencia significativa entre los efectos de los tratamientos, medida sobre las medianas de el hipervolumen, la cardinalidad o el tiempo de ejecución. Después se realizó una prueba de Wilcoxon para cada pareja de tratamientos, determinando el mejor de ellos para cada variable de respuesta. La tabla 5.3 muestra las mejores configuraciones determinadas realizando las pruebas antes mencionadas, todas hechas con una significancia de 0.001, incluso menor.

Factores	Medidas de desempeño		
	hipervolumen	cardinalidad	tiempo de ejecución
Tamaño de la población	40	40	10
Número de generaciones	20	40	20
Probabilidad de cruzamiento	0.5	0.5	0.75
Probabilidad de mutación	0.5	0.75	0.75
Introducción de individuos	0.75	1	0.5

Tabla 5.3. Mejores configuraciones obtenidas por pruebas no paramétricas para NSGA-II.

En esta experimentación, se obtuvieron un total de 7290 observaciones lo que impidió hacer la prueba de normalidad requerida; esto debido a limitaciones del software. Sin embargo, ante tal cantidad de datos el Teorema del Limite Central [54] hace pertinente el uso de pruebas paramétricas.

Análisis de varianza para hipervolumen

Considerando el hipervolumen como medida de desempeño, se realizó una prueba ANOVA con un nivel de significancia del 0.01 %. El tamaño de la población, el número de generaciones y el tiempo de introducción de nuevos individuos son altamente significativos; mientras que las probabilidades de cruzamiento y mutación no lo son. La Figura 5.5 muestra las gráficas de medias para cada parámetro.

Se realizó una prueba de Tukey para mostrar la diferencia entre los niveles de los factores

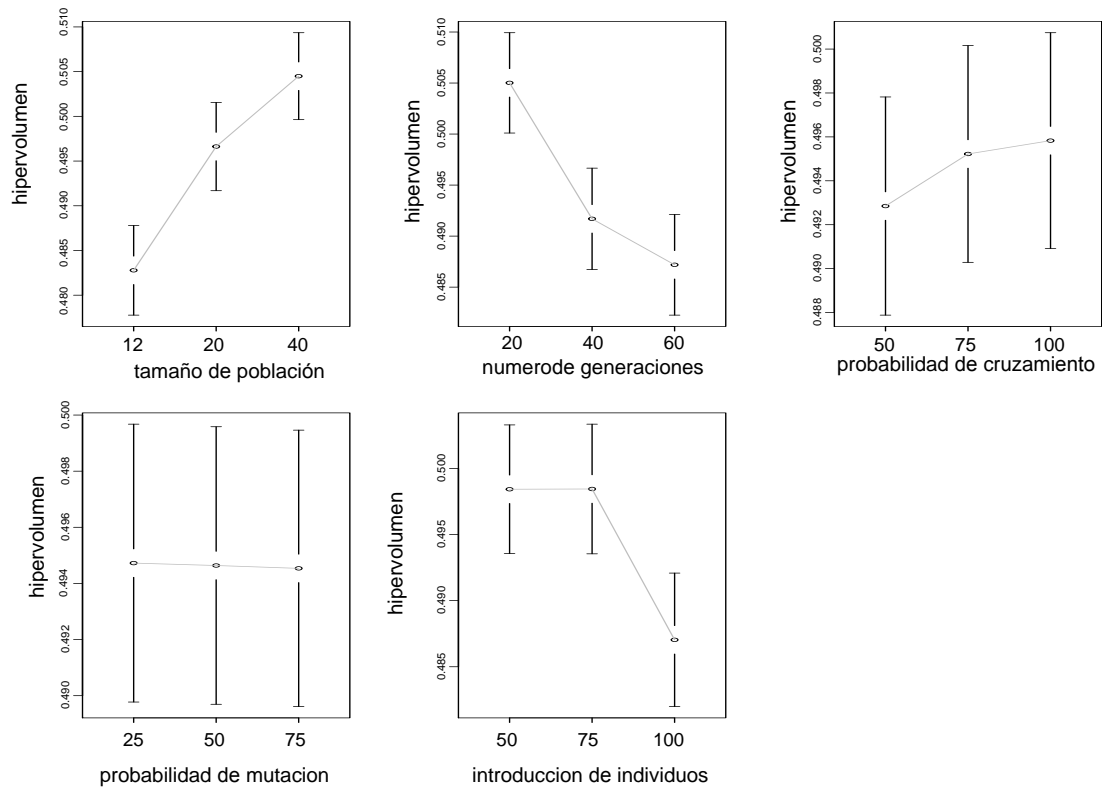


Figura 5.5. Gráficas de medias de los parámetros de NSGA-II para hipervolumen.

significantes, en base a las diferencias significativas y al valor de las medias (ver Figura 5.6), los mayores valores de hipervolumen se obtienen con un tamaño de población de 40; 20 generaciones y la introducción de individuos en 0.5 o 0.75. Las probabilidades de cruzamiento y mutación pueden tomar cualquier valor. Una de estas configuraciones había sido deducida por las pruebas no paramétricas.

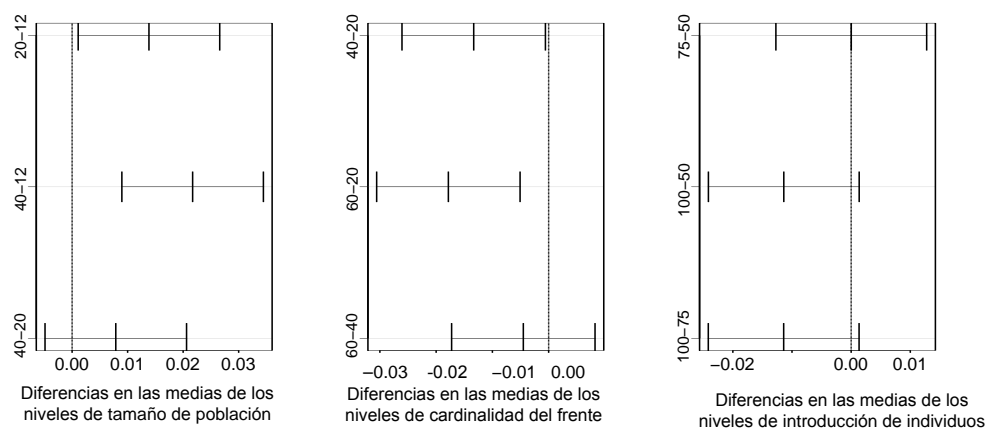


Figura 5.6. Diferencias entre las medias de los niveles para los factores significativos de NSGA-II.

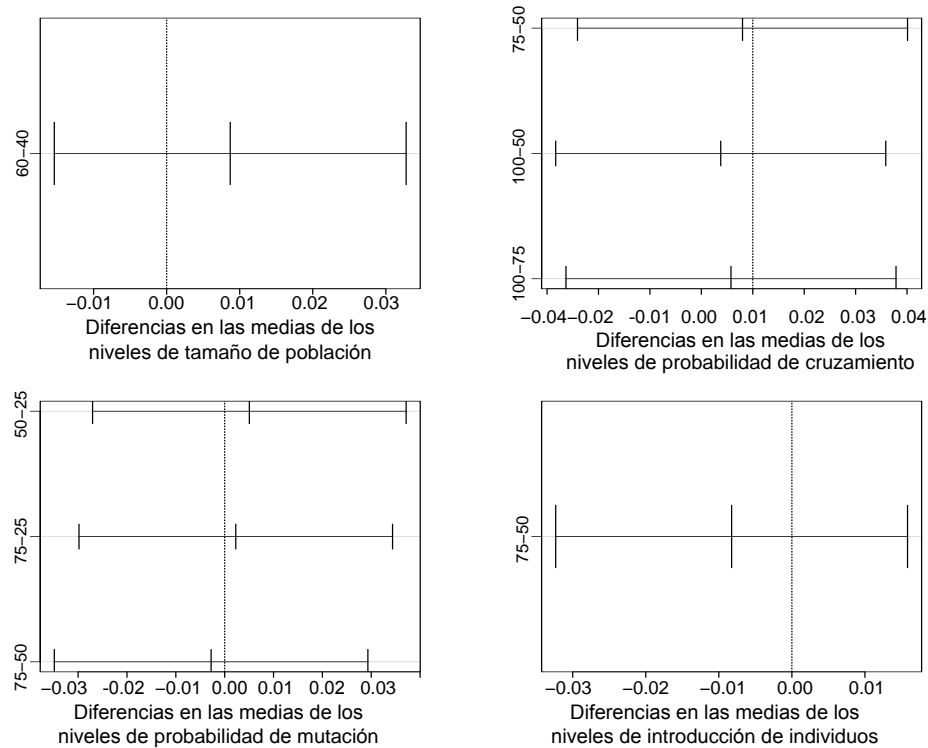


Figura 5.7. Diferencias entre las medias de los niveles para los factores significativos de la prueba de aumento de población en NSGA-II.

Observe que ya no es necesario realizar experimentación para valores mayores de generaciones; sin embargo, se aprecia que si aumenta el tamaño de la población si mejora el hipervolumen. Por tanto, se sigue con un aumento a 60 individuos en la población y se prueban con todos los posibles valores en probabilidad de cruzamiento y mutación y la introducción de individuos en 0.5 y 0.75; es decir, aquellos niveles correspondientes en los que no hubo diferencia significativa.

Al comparar el hipervolumen de las estas nuevas configuraciones con las correspondientes de 40 individuos, se obtuvo que no existe diferencia significativa en ninguno de los factores. Por lo tanto, se consideran como mejores tratamientos para hipervolumen aquellos que tengan 40 individuos en la población, 20 generaciones, cualquier nivel para las probabilidades de mutación y cruzamiento y una introducción de individuos en 0.5 o 0.75. La Figura 5.7 muestra las diferencias entre las medias de los niveles para los factores que se compararon, resultado de una prueba de Tukey.

Análisis de varianza para cardinalidad de los frentes obtenidos

Es necesario aclarar que al finalizar el algoritmo NSGA-II, no todos los individuos de la población son reportados como solución, solo aquellos que son no dominados y se evitan repeticiones. Por tanto, no debe interpretarse como cardinalidad el tamaño de la población.

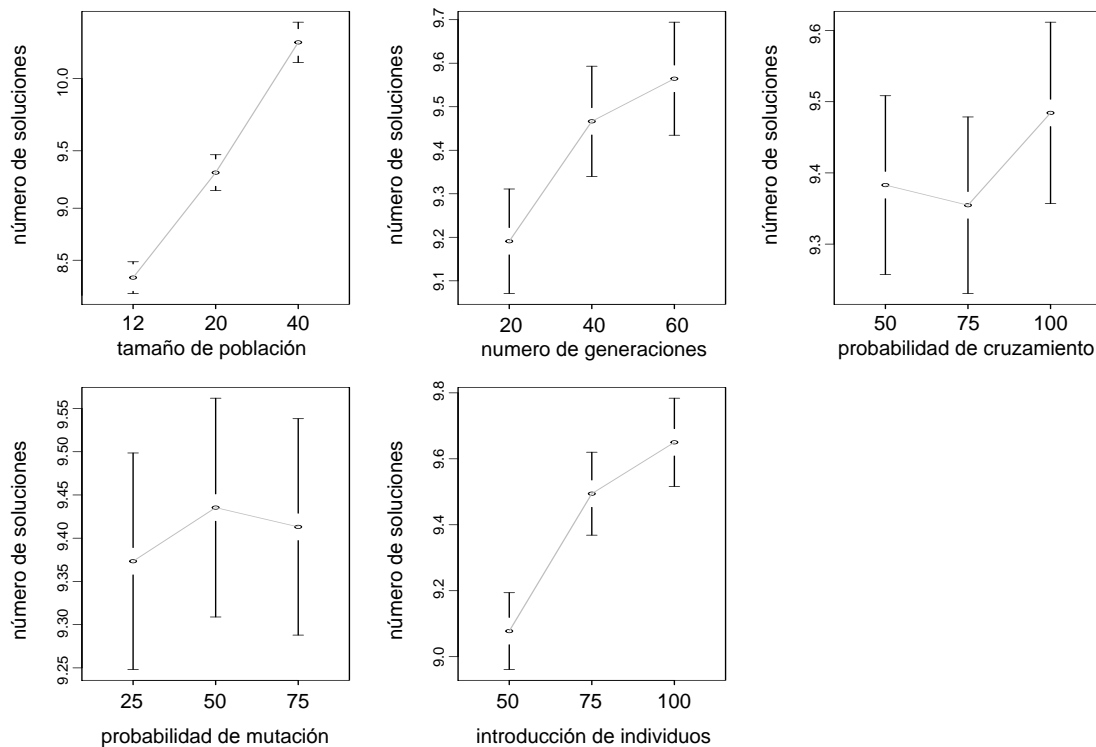


Figura 5.8. Gráficas de medias de los parámetros de NSGA-II para cardinalidad del frente.

De igual forma que el análisis para hipervolumen, se demostró estadísticamente que los mismos factores son significativos para la cantidad de soluciones que conforman el frente. Utilizando la prueba de Tukey para identificar las diferencias estadísticas entre los niveles de los factores antes mencionados; así como el valor de las medias (ver Figura 5.8), las configuraciones de mayor cardinalidad son aquellas formadas por un tamaño de población de 40, 40 o 60 generaciones, la introducción de individuos en 0.75 o 1 y cualquier valor para probabilidad de cruzamiento y mutación. De igual forma, una de estas configuraciones se obtuvo de forma no paramétrica.

Era de esperarse que una población más grande se reflejara en mas soluciones no dominadas. Un frente de mayor cardinalidad debe representar mayor calidad que puede ser

medida con hipervolumen. Sin embargo, las contradicciones que tuvo con las conclusiones de hipervolumen nos hacen dudar de la eficacia de esta medida de desempeño.

La necesidad de más generaciones refleja que el algoritmo esta produciendo diversidad entre la población pero no acercándose al frente exacto. Por otro lado, se observa que la introducción de nuevos individuos al final del algoritmo genera nuevas soluciones no dominadas, efecto del procedimiento VNS Biobjetivo utilizado como mecanismo de introducción de nuevos individuos.

Puesto que la cardinalidad del frente no refleja correctamente la calidad del frente obtenido, nos decantamos sólo por las conclusiones para hipervolumen. Por supuesto, se utiliza el tiempo de ejecución para recomendar una sola configuración.

Análisis de varianza para tiempo de ejecución

El tiempo que el algoritmo utiliza para determinar el frente de Pareto es un aspecto muy importante. Como vemos, hay muchas configuraciones que representan buena calidad medida con el hipervolumen. El objetivo ahora es verificar cuál de estas lo hace en el menor tiempo posible. Paradójicamente, la configuración de nuestros parámetros es otro problema multiobjetivo, ya contamos con ‘soluciones’ que maximizan la calidad, ahora en un sentido lexicográfico, minimizamos el tiempo de ejecución.

Procediendo de igual forma que en los análisis anteriores, determinamos la significancia de los factores para el tiempo de ejecución. El resultado es nuevamente el mismo, el tamaño de la población, el número de generaciones y la introducción de nuevos individuos son quienes tienen un efecto sobre la variable de respuesta.

De acuerdo a la prueba de Tukey realizada, existe diferencia entre cada par de niveles de estos tres factores. Aunque con una significancia menor, 0.05, existe diferencia entre los niveles de la probabilidad de cruzamiento, siendo 0.5 y 0.75 los mejores (*ver Figura 5.9*). En base a estas observaciones, el tratamiento que produce menor tiempo de ejecución del algoritmo es 12 individuos en la población, 20 generaciones, una probabilidad de cruzamiento de 0.5 o 0.75, cualquier probabilidad de mutación y una introducción de individuos en 0.5.

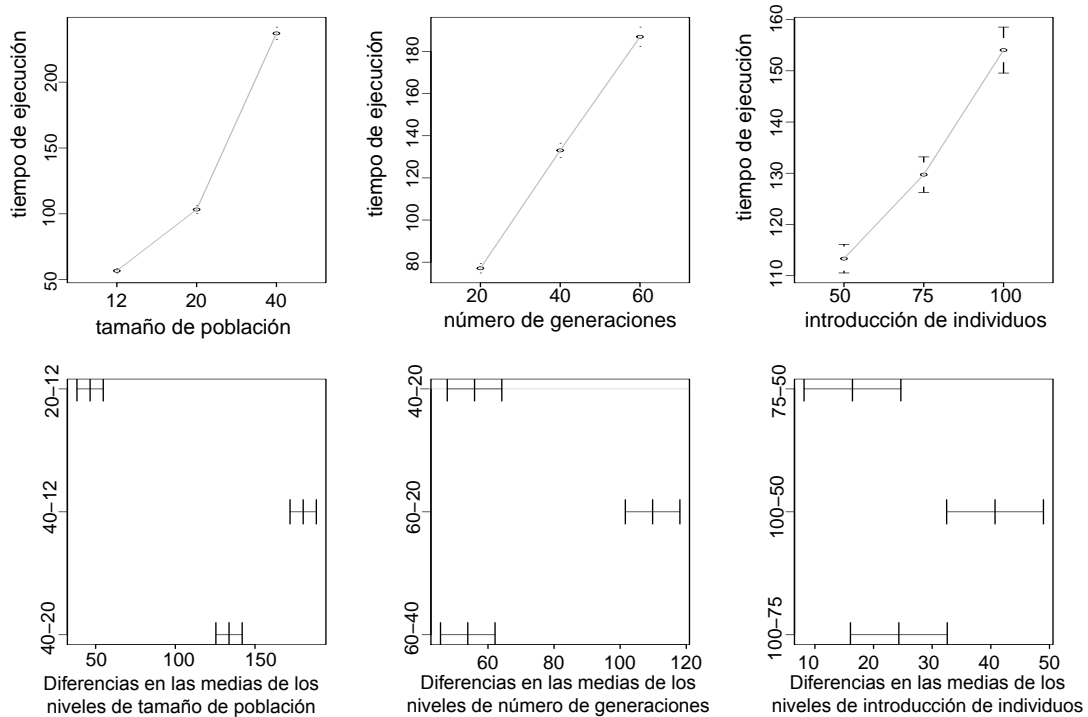


Figura 5.9. Gráficas de medias y diferencias entre las medias de los niveles para los factores significativos en tiempo de ejecución para NSGA-II.

Conclusiones

La prioridad para elegir las configuraciones es calidad y después tiempo. Así, las mejores configuraciones serían formadas por 40 individuos en la población, 20 generaciones, probabilidad de cruzamiento 0.5 o 0.75, cualquier probabilidad de mutación e introducción de individuos en 0.5.

Aunque no existe diferencia significativa entre la probabilidad de cruzamiento en 0.5 y 0.75 para ninguna medida de desempeño, elegimos 0.75 porque tiene un pequeño aumento en hipervolumen. De igual forma para la probabilidad de mutación, seleccionamos 0.5 porque representa un pequeño aumento en la cardinalidad del frente.

En conclusión, la mejor configuración para el algoritmo NSGA-II es 40 individuos en la población, 20 generaciones, probabilidad de cruzamiento 0.75, probabilidad de mutación 0.5 e introducción de individuos en 0.5.

4.3. Comparación del algoritmo GRASP y el NSGA-II

Una vez configurados ambos procedimientos con los valores de los parámetros que producen las soluciones de mejor calidad, se procede a compararlos entre sí. Las medidas de desempeño son el hipervolumen, la cardinalidad de los frentes obtenidos y el tiempo de computo utilizado.

La mejor configuración para el algoritmo GRASP consta de una población de 20 individuos. En el caso de NSGA, una población de 40 individuos, 20 generaciones para evolucionar, probabilidades de cruzamiento y mutación de 0.75 y 0.5, respectivamente y la introducción de individuos a la mitad de la evolución. Para ambos, se utilizan 5 iteraciones en el procedimiento VNS.

El mismo procedimiento realizado para el ajuste de parámetros es aplicable para la comparación de los algoritmos considerándolos a estos como los tratamientos. Para las tres medidas de desempeño, resultó significativa la diferencia entre ambos, con un mejor valor en la mediana el algoritmo GRASP para los tres casos y un nivel de confianza del 99.9 %. La Figura 5.10 muestra las gráficas de las medianas de cada variable de desempeño para ambos algoritmos.

En general, algoritmo GRASP encuentra soluciones de un hipervolumen y cardinalidad mayor que NSGA-II. Además, tiempo de computo es notablemente menor, excepto para las instancias de 40 clientes.

4.4. Eficacia de las metaheurísticas

Por último, la eficacia de las metaheurísticas puede ser verificada utilizando los frentes que fueron calculados de forma exacta como referencia (*ver Apéndice B*).

Se compararon los resultados de la mejor configuración de cada algoritmo contra los frentes obtenidos de forma exacta utilizando AUGMECON2. Las Figura 5.11 muestran las medidas de hipervolumen y cardinalidad, respectivamente, de las tres metodologías

Note que ambos algoritmos implementados superan en hipervolumen y cardinalidad promedio al frente de referencia en todas las instancias de la experimentación. El algoritmo

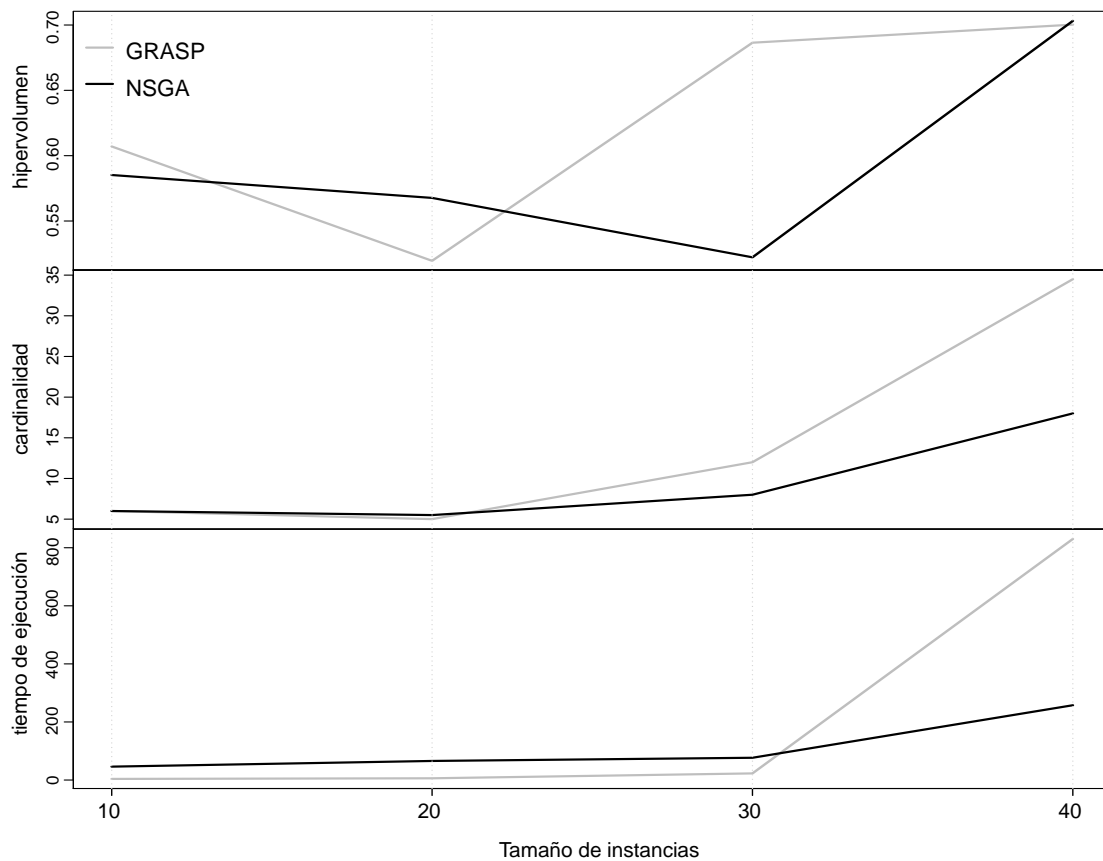


Figura 5.10. Medianas para los diferentes tamaños de instancia de las medidas de desempeño para GRASP y NSGA-II.

GRASP se basa en el mismo esquema en el que fueron obtenidos los frentes exactos; sin embargo, en el enfoque heurístico se permite tomar cualquier valor de ε a AUGMECON2, esperando poder encontrar mas soluciones no dominadas.

En general, no se aprecia una diferencia clara entre GRASP y NSGA-II; sin embargo fue demostrado estadísticamente que el primero es significativamente superior. Las Figuras 5.12 y 5.13 muestran un par de instancias de 10 y 15 clientes, respectivamente, resueltas bajo el enfoque exacto y los dos procedimientos implementados. Note como la mayoría de las soluciones no dominadas son encontradas por los procedimientos e incluso, nuevas soluciones. A pesar de no contar con la certeza de que estas nuevas soluciones pertenecen al frente exacto, si son no dominadas respecto a este.

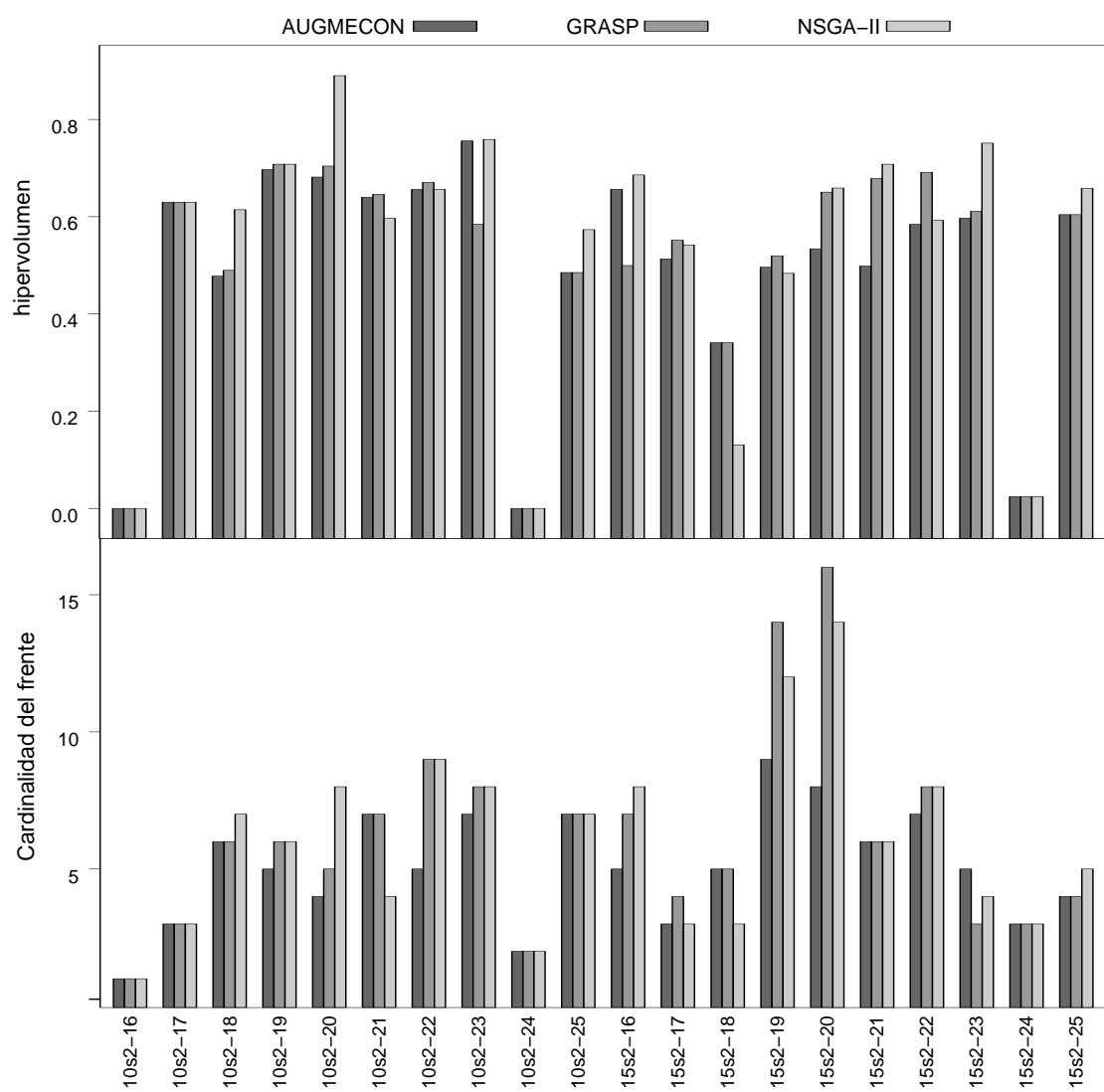


Figura 5.11. Comparación de los algoritmos heurísticos contra los frentes obtenidos por AUGMECON2

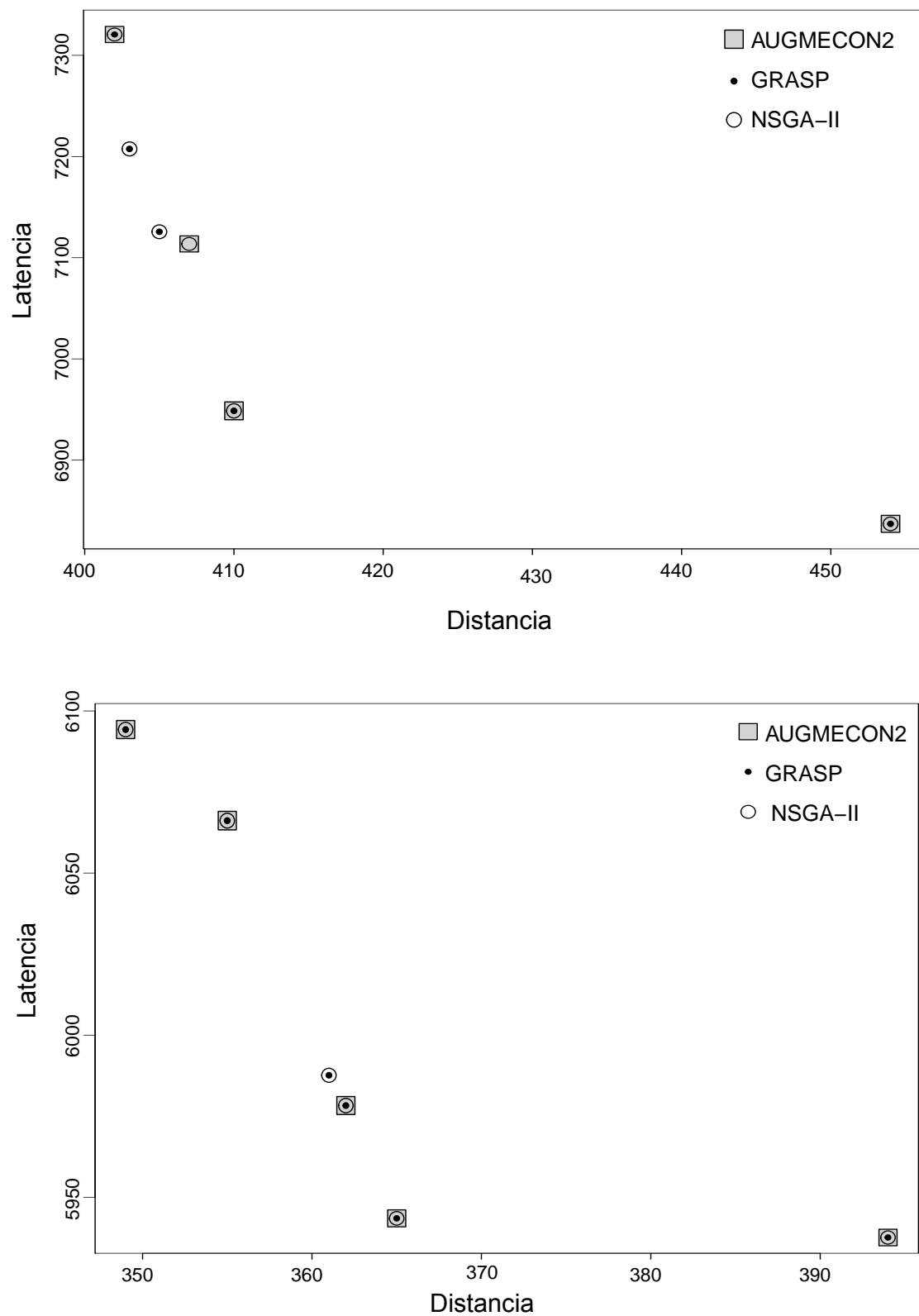


Figura 5.12. Eficacia de los algoritmos heurísticos sobre dos instancias muestra de 10 clientes.

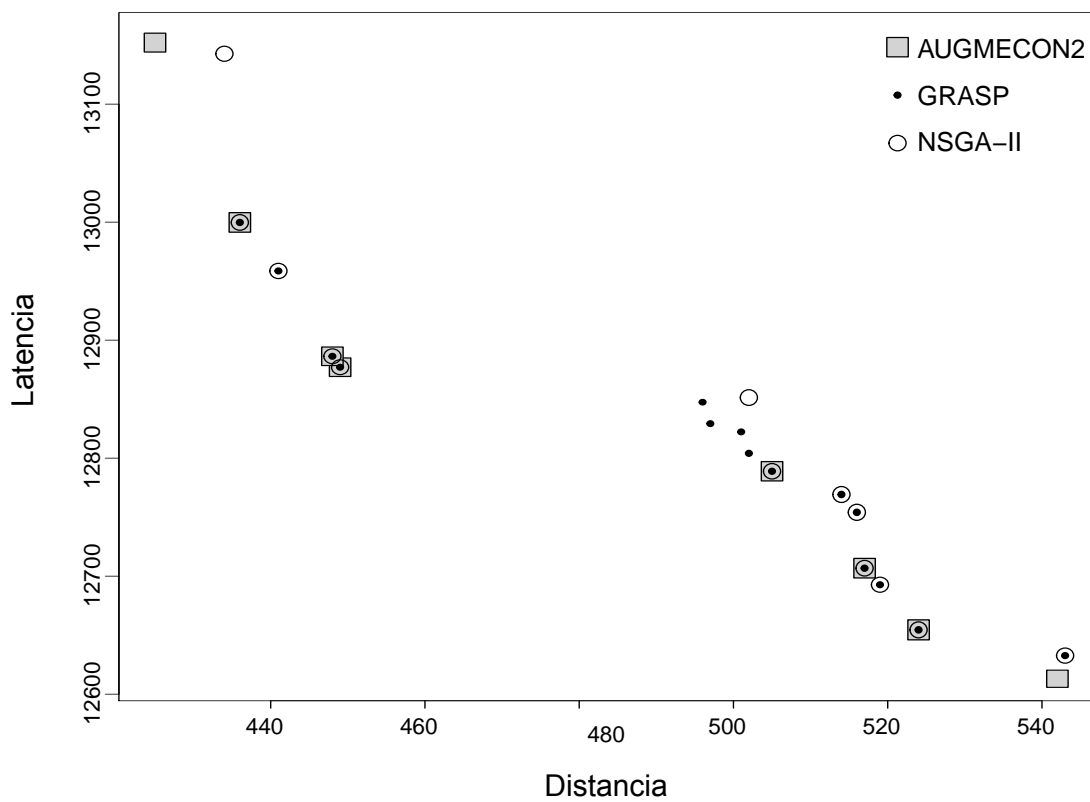
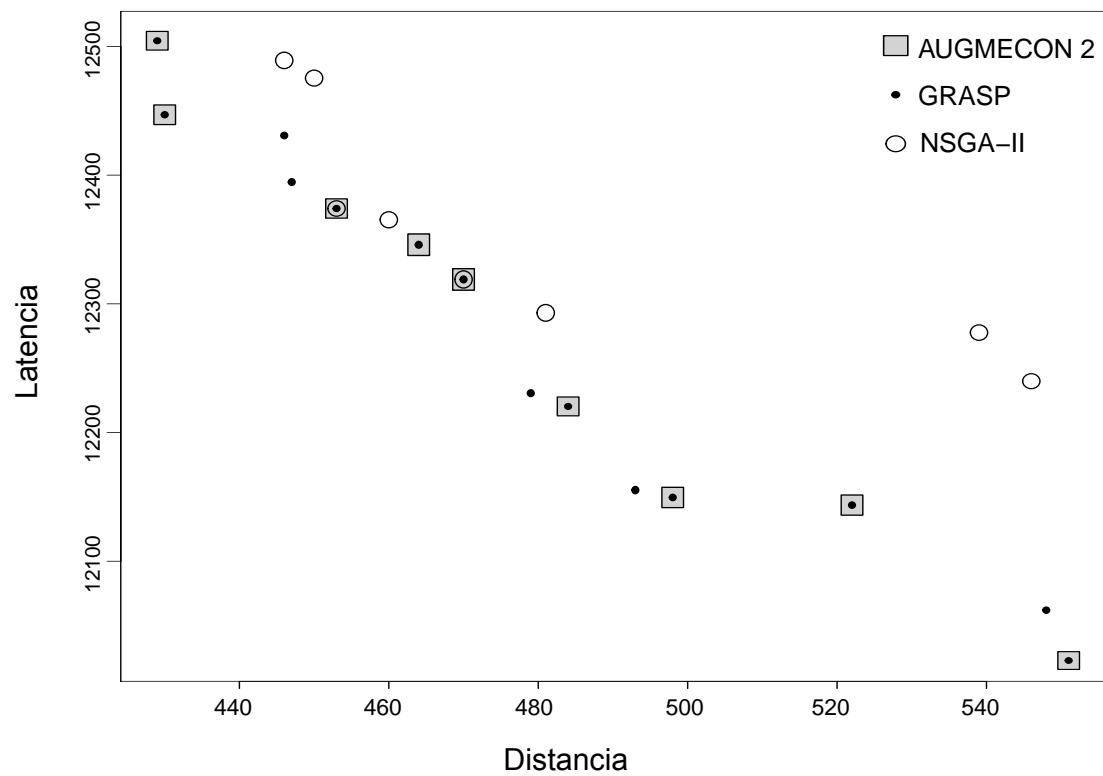


Figura 5.13. Eficacia de los algoritmos heurísticos sobre dos instancias muestra de 15 clientes.

Capítulo 6

Conclusiones

Este trabajo aborda el estudio del problema del agente viajero con múltiples viajes bajo la optimización simultánea de la distancia total de la ruta y la latencia de todos los clientes.

Se propusieron dos formulaciones biobjetivo lineal enteras para el problema, cada una utilizando las ideas de las formulaciones más adecuadas para cada objetivo reportadas en la literatura. El tiempo de cómputo necesario para determinar un frente de Pareto utilizando un método exacto sirvió como medida de desempeño para evaluar cuál formulación es la más conveniente para encontrar parcialmente los frentes exactos de instancias de 10 y 15 clientes. El modelo basado en latencia resultó ser mucho más rápido.

Se analizaron dos esquemas de escalarización multiobjetivo, el método de la suma ponderada y AUGMECON2, se evaluó el desempeño teórico y experimental de ambos enfoques, decidiendo utilizar el método AUGMECON2 por un notable incremento en la cardinalidad e hipervolumen del frente y un tiempo menor de cómputo.

Finalmente, se desarrollaron e implementaron dos algoritmos heurísticos como alternativa de solución, reportando resultados de mayor cardinalidad e hipervolumen promedio que los frentes determinados de forma exacta, en una mínima fracción del tiempo utilizado para determinar estos últimos. Los algoritmos desarrollados fueron un algoritmo genético NSGA-II con introducción de nuevos individuos durante la evolución y un procedimiento de mejora VNS como mutación y; un algoritmo GRASP adaptado a biobjetivo utilizando el método AUGMECON2 como guía para la optimización y VNS como procedimiento de mejora.

Cada comparación se fundamentó con una prueba estadística incluyendo aquella entre

los procedimientos heurísticos, resultando el algoritmo GRASP el de mejor desempeño, en tiempo, hipervolumen y cardinalidad del frente; sin embargo el NSGA-II mostró un comportamiento más estable. Ambos procedimientos fueron probados en instancias de hasta 40 clientes.

Como trabajo futuro, se pretende hacer una mayor utilización de las características del problema que se observaron durante su formulación, pero se hace mención de un aprovechamiento de este análisis para la eficiencia de los procedimientos de búsqueda local utilizados como parte del algoritmo VNS. Se pretende investigar el comportamiento de los algoritmos heurísticos bajo instancias de tamaño mucho más grandes; incluyendo mejoras en los procedimientos de mejora y en el manejo apropiado de la población para mantener la diversidad y convergencia utilizando menos individuos. En mayor escala, estudiar el problema en el caso de múltiples vehículos y aplicar esta investigación en una situación real.

Apéndice A

Desglose de experimentación

Tabla A.1. Tiempo de cómputo promedio utilizado por AUGMECON2 y Suma ponderada y cardinalidad de los frentes obtenidos para instancias de 10 clientes.

instancia	AUGMECON2		Suma Ponderada	
	tiempo	cardinalidad	tiempo	cardinalidad
10s0-01	582.675	1	644.367	1
10s0-02	4.092	3	758.167	2
10s0-03	54.145	3	9.227	3
10s0-04	620.825	4	907.833	3
10s0-05	997.825	3	9.088	3
10s0-06	3.047	2	6.038	2
10s0-07	420.875	2	998.533	2
10s0-08	477.875	4	9.018	3
10s0-09	43.325	2	8.343	2
10s0-10	3.52	1	239.167	1
10s0-11	679.575	4	894.567	3
10s0-12	70.605	3	888.333	3
10s0-13	164.192	6	9.989	2
10s0-14	52.685	2	909.633	2
10s0-15	915.225	3	18.262	3
10s0-16	750.825	3	10.937	2
10s0-17	95.835	2	38.535	2
10s0-18	355.225	2	887.667	2
10s0-19	194.722	7	115.497	4

instancia	AUGMECON2		Suma Ponderada	
	tiempo	cardinalidad	tiempo	cardinalidad
10s0-20	101.453	5	118.483	3
10s0-21	115.098	4	15.693	2
10s0-22	187.355	7	284.157	2
10s0-23	101.313	5	10.327	3
10s0-24	508.425	4	803.933	3
10s0-25	105.245	5	197.227	4
10s1-01	991.625	3	45.565	2
10s1-02	255.225	2	7.607	2
10s1-03	945.125	7	885.367	4
10s1-04	5.803	4	8.225	2
10s1-05	13.312	5	8.935	3
10s1-06	295.275	2	790.233	2
10s1-07	484.475	2	109.757	2
10s1-08	686.175	5	827.067	3
10s1-09	397.625	2	7.821	2
10s1-10	37.575	1	2.301	1
10s1-11	37.835	2	8.505	2
10s1-12	749.075	4	911.033	2
10s1-13	124.158	6	9.673	3
10s1-14	546.775	3	904.167	3
10s1-15	112.013	6	137.213	3
10s1-16	126.323	5	132.433	3
10s1-17	774.575	2	49.231	2
10s1-18	72.705	5	8.984	3
10s1-19	134.485	5	138.947	3
10s1-20	938.925	4	12.886	3
10s1-21	156.763	6	206.043	4
10s1-22	158.655	5	32.431	3
10s1-23	10.587	4	124.233	3

instancia	AUGMECON2		Suma Ponderada	
	tiempo	cardinalidad	tiempo	cardinalidad
10s1-24	34.055	2	924.333	2
10s1-25	73.205	3	195.703	3
10s2-01	38.634	8	616.893	5
10s2-02	158.425	1	1.055	1
10s2-03	7.997	7	868.167	3
10s2-04	4.229	3	837.567	3
10s2-05	215.715	6	880.133	3
10s2-06	42.345	3	859.633	2
10s2-07	570.875	3	119.877	3
10s2-08	392.375	3	834.267	2
10s2-09	104.978	6	865.767	2
10s2-10	111.657	5	14.326	2
10s2-11	380.275	2	868.933	2
10s2-12	120.693	6	973.767	2
10s2-13	107.235	6	974.767	3
10s2-14	662.925	3	8.869	3
10s2-15	127.605	5	38.96	3
10s2-16	408.975	1	241.233	1
10s2-17	987.825	3	52.507	3
10s2-18	67.745	6	9.053	3
10s2-19	107.587	5	12.192	2
10s2-20	148.577	4	185.483	4
10s2-21	196.058	7	26.423	5
10s2-22	181.255	5	555.607	4
10s2-23	117.085	7	133.607	4
10s2-24	259.075	2	880.867	2
10s2-25	128.295	7	223.037	2
Promedio	289.368	4	355.753	2.613

Tabla A.2. Tiempos de computo utilizados por AUGMECON2 para las formulaciones basadas en distancia y latencia en instancias de 10 clientes

Instancia	Formulación basada en:	
	distancia	latencia
10s0-01	34892.8	5.82675
10s0-02	14109.1	4.092
10s0-03	15906.6	5.4145
10s0-04	11540.7	6.20825
10s0-05	23729.3	9.97825
10s0-06	16510.1	3.047
10s0-07	^a	4.20875
10s0-08	^a	4.77875
10s0-09	16279.2	4.3325
10s0-10	16534.9	3.52
10s0-11	14187.6	6.79575
10s0-12	20079.3	7.0605
10s0-13	29233.9	16.41925
10s0-14	13546.8	5.2685
10s0-15	13788.2	9.15225
10s0-16	24509.3	7.50825
10s0-17	14308	9.5835
10s0-18	11826.7	3.55225
10s0-19	18603.7	19.47225
10s0-20	12441.2	10.14525
10s0-21	33555.5	11.50975
10s0-22	13672.9	18.7355
10s0-23	20633.6	10.13125
10s0-24	12486.6	5.08425
10s0-25	12399.7	10.5245
Promedio	18033.7261	8.09399

^aInstancias no resueltas

Apéndice B

Frentes de Pareto exactos para instancias de 10 clientes

Instancia	Distancia	Latencia
10s0-01	375	1401
10s0-02	420	1665
	408	1849
	404	1857
10s0-03	455	1573
	397	1586
	388	1672
10s0-04	364	1258
	340	1308
	327	1351
	313	1374
10s0-05	436	1729
	418	1735
	415	1794
10s0-06	314	1092
	310	1169
10s0-07	303	1181
	302	1210
10s0-08	428	1651
	421	1728

Instancia	Distancia	Latencia
	396	1796
	394	1822
10s0-09	376	1441
	374	1445
10s0-10	444	1813
10s0-11	511	1983
	491	1985
	459	2005
	455	2021
10s0-12	452	1825
	441	1862
	429	1936
10s0-13	420	1662
	416	1736
	414	1753
	410	1769
	406	1841
	396	1885
10s0-14	390	1589
	389	1673

Instancia	Distancia	Latencia	Instancia	Distancia	Latencia
10s0-15	472	1688		476	1774
	445	1814		467	1789
	439	1958		460	1797
10s0-16	343	1382		448	1862
	340	1410	10s0-23	444	1518
	338	1424		425	1576
10s0-17	344	1385		413	1604
	325	1391		411	1777
10s0-18	364	1552		408	1860
	355	1566	10s0-24	395	1568
10s0-19	365	1350		373	1575
	363	1378		372	1607
	361	1403		357	1683
	355	1416	10s0-25	434	1306
	353	1444		422	1356
	351	1469		420	1396
	349	1620		411	1429
10s0-20	433	1535		409	1469
	427	1551	10s1-01	398	2332
	423	1561		395	2360
	406	1567		375	2451
	402	1719	10s1-02	408	2975
10s0-21	423	1425		404	2990
	420	1620	10s1-03	500	2450
	418	1722		485	2459
	416	1769		457	2511
10s0-22	509	1551		455	2531
	498	1618		442	2539
	492	1728		398	2617

Instancia	Distancia	Latencia	Instancia	Distancia	Latencia
	388	2773		420	2857
10s1-04	379	2212		416	2883
	348	2217		413	2974
	340	2223		409	2980
	313	2244		396	3066
10s1-05	446	2953	10s1-14	409	2416
	441	2965		390	2419
	432	2969		389	2489
	418	3006	10s1-15	480	2379
	415	3071		472	2408
10s1-06	314	2058		469	2511
	310	2145		445	2516
10s1-07	303	2443		441	2670
	302	2510		439	2684
10s1-08	428	2277	10s1-16	365	2420
	417	2469		359	2429
	412	2484		344	2481
	396	2530		343	2486
	394	2571		338	2490
10s1-09	376	2007	10s1-17	371	2356
	374	2010		325	2418
10s1-10	444	2836	10s1-18	435	2414
10s1-11	459	3064		411	2455
	455	3085		386	2482
10s1-12	477	2631		357	2531
	452	2640		355	2573
	441	2663	10s1-19	376	2338
	429	2674		361	2405
10s1-13	440	2794		355	2408

Instancia	Distancia	Latencia	Instancia	Distancia	Latencia
	351	2429		399	4918
	349	2776		390	5021
10s1-20	432	2212		389	5059
	415	2219		379	5275
	406	2230		375	5453
	402	2434	10s2-02	404	6419
10s1-21	424	2647	10s2-03	433	5861
	423	2665		423	5889
	422	2704		415	5904
	420	2743		398	5942
	418	2997		397	5947
	416	3032		389	6032
10s1-22	509	2324		388	6037
	498	2377	10s2-04	361	5723
	460	2641		319	5729
	454	2666		313	5936
	448	2667	10s2-05	486	5968
10s1-23	425	2951		456	6123
	413	3018		446	6269
	411	3132		436	6308
	408	3191		418	6364
10s1-24	377	2890		415	6412
	357	2908	10s2-06	427	5169
10s1-25	431	2488		320	5218
	410	2507		310	5250
	409	2518	10s2-07	365	4670
10s2-01	423	4780		303	4717
	410	4845		302	4740
	408	4905	10s2-08	403	5772

Instancia	Distancia	Latencia	Instancia	Distancia	Latencia
	396	5774		389	5802
	394	5791	10s2-15	524	6689
10s2-09	446	5864		471	6702
	435	5865		454	6742
	414	5870		447	6940
	386	5901		439	6953
	376	5910	10s2-16	338	5538
	374	5925	10s2-17	328	5416
10s2-10	460	6143		326	5430
	458	6174		325	5668
	448	6372	10s2-18	424	5451
	446	6381		416	5469
	444	6402		409	5523
10s2-11	457	7384		392	5662
	455	7421		359	5679
10s2-12	485	7146		355	5818
	474	7181	10s2-19	394	5939
	462	7259		365	5945
	452	7305		362	5980
	451	7311		355	6068
	429	7487		349	6096
10s2-13	485	5840	10s2-20	454	6832
	462	5877		410	6942
	455	5889		407	7118
	418	5900		402	7325
	412	5948	10s2-21	430	6417
	396	6544		428	6419
10s2-14	446	5681		423	6464
	393	5732		423	6464

Instancia	Distancia	Latencia
	420	6649
	418	7288
	416	7298
10s2-22	527	6108
	502	6143
	478	6188
	463	6292
	448	6564
10s2-23	457	5758
	444	5790
	441	5803
	433	5909
	413	5925
	411	6054
	408	6393
10s2-24	373	5340
	357	5647
10s2-25	447	6055
	441	6063
	436	6077
	425	6105
	420	6121
	414	6149
	409	6165

Apéndice C

Frentes de Pareto exactos para instancias de 15 clientes

Instancia	Distancia	Latencia	Instancia	Distancia	Latencia
15s0-01	497	2745		512	3016
	493	2757		509	3073
	484	2805	15s0-05	591	3131
	480	2817		567	3203
15s0-02	562	3132		558	3549
	553	3148		555	3643
	542	3247		554	3701
	538	3253	15s0-06	566	3135
	521	3281		554	3169
	517	3290		535	3179
15s0-03	631	3398		527	3185
	599	3490		525	3522
	583	3520	15s0-07	660	3355
	569	3524		647	3361
	567	3542		636	3364
	551	3582		600	3367
15s0-04	527	2955		583	3733
	520	2970		577	3785
	515	2997	15s0-08	543	2710
	514	3013		509	2795

Instancia	Distancia	Latencia	Instancia	Distancia	Latencia
	475	2840		531	3313
	471	3024		522	3335
	464	3068		515	3389
15s0-09	460	2229	15s0-14	556	3132
	456	2231		498	3225
	449	2305	15s0-15	594	3018
	444	2345		564	3021
	438	2356		546	3044
	433	2450		536	3074
	427	2461		533	3098
15s0-10	492	2818		525	3206
	487	2831		520	3576
	468	2912	15s0-16	653	3398
	467	3215		628	3418
15s0-11	594	3082		618	3464
	565	3120		604	3496
	557	3126		579	3569
	530	3186	15s0-17	528	2838
	518	3214		487	2872
	509	3221		481	2894
	494	3247		470	2968
	493	3268		461	3005
15s0-12	563	3487		458	3010
	562	3511	15s0-18	676	3955
	560	3750		643	4006
	555	3792		638	4111
15s0-13	606	3238		627	4144
	557	3240		621	4150
	539	3248		615	4272

Instancia	Distancia	Latencia	Instancia	Distancia	Latencia
15s0-19	488	2643		459	2869
	477	2649		435	2881
	453	2651	15s0-25	650	3431
	429	2670		610	3440
15s0-20	463	2507		549	3521
	451	2509		541	3746
	438	2598	15s1-01	592	5167
	435	2677		497	5183
	432	2744		484	5224
	425	2842		480	5236
15s0-21	629	3078	15s1-02	582	4899
	612	3120		556	5010
	607	3201		517	5117
	596	3240	15s1-03	631	6951
	593	3263		616	7119
	584	3274		551	7170
	563	3365	15s1-04	520	5904
	557	3727		511	6024
15s0-22	590	3282		509	6076
	532	3305	15s1-05	648	6163
	523	3393		623	6205
	510	3400		617	6303
15s0-23	562	3265		591	6342
	558	3468		567	6366
	556	3621		558	6432
	554	3674		554	6578
	545	3708	15s1-06	527	5273
	543	3771		525	5736
15s0-24	480	2806	15s1-07	642	5656

Instancia	Distancia	Latencia	Instancia	Distancia	Latencia
	623	5722		539	6022
	617	5748		522	6070
	606	5852		515	6251
	600	6020	15s1-14	565	6012
	583	6351		535	6074
	577	6513		526	6082
15s1-08	479	5005		498	6601
	472	5049	15s1-15	546	5765
	471	5152		533	5836
	468	5296		533	5836
	464	5313		526	6148
15s1-09	438	5764		524	6214
	427	5881		522	6300
15s1-10	594	6183		520	6402
	562	6244	15s1-16	642	6758
	550	6304		617	6771
	543	6309		614	6795
	520	6327		605	6860
	498	6342		593	6881
	493	6475		586	6935
15s1-12	569	6370		585	7004
	567	6376		579	7258
	566	6380	15s1-17	555	5195
	563	6406		544	5308
	562	6410		521	5309
	559	6801		491	5346
	555	6827		485	5355
15s1-13	593	5982		474	5376
	575	6007		462	5388

Instancia	Distancia	Latencia	Instancia	Distancia	Latencia
	458	5396	15s1-23	598	6235
15s1-18	673	6591		591	6281
	634	6620		586	6353
	630	6622		578	6394
	626	6812		572	6397
	615	7442		570	6426
15s1-19	470	4932		565	6436
	444	4934		559	6590
	429	5086		545	6635
15s1-20	491	5743		543	6675
	462	5809	15s1-24	437	4573
	447	5852		435	4618
	442	5861	15s1-25	541	6266
	438	5883	15s2-01	530	14989
	425	6059		512	15140
15s1-21	629	5794		505	15328
	615	5890		500	15356
	608	5893		491	15827
	607	5910		488	15892
	596	5968		480	16225
	584	5982	15s2-02	556	13336
	563	6121		531	13369
	557	6233		527	13511
15s1-22	576	6014		524	13579
	550	6074		520	13731
	535	6088		517	13838
	526	6120	15s2-03	637	12307
	511	6149		608	12389
	510	6217		597	12567

Instancia	Distancia	Latencia	Instancia	Distancia	Latencia
	579	12659	15s2-08	489	12510
	567	12693		486	12624
	554	12731		468	12642
	551	12993		464	13163
15s2-04	531	14097	15s2-09	509	12945
	525	14134		490	13154
	523	14171		476	13164
	517	14208		459	13238
	509	14212		450	13340
15s2-05	638	13990		439	13451
	625	14265		429	13654
	621	14407		427	13675
	612	14548	15s2-10	*	*
	602	14595	15s2-11	556	11859
	594	14669		549	12126
	572	14801		503	12250
	567	14827		497	12790
	558	14936		493	13027
	554	15178	15s2-12	593	17613
15s2-06	566	11701		587	17942
	527	11812		573	17957
	525	12090		570	17967
15s2-07	623	17860		563	18094
	606	17884		562	18127
	600	18077		555	18234
	594	18477	15s2-13	604	14054
	583	18492		541	14102
	581	18579		521	14143
	577	18792		515	14253

Instancia	Distancia	Latencia	Instancia	Distancia	Latencia
15s2-14	564	16204		430	12451
	550	16421		429	12508
	543	16487	15s2-20	542	12616
	536	16738		524	12659
	531	16742		517	12711
	524	16821		505	12793
	513	17154		449	12884
	498	17217		448	12890
15s2-15	*	*		436	13004
15s2-16	764	17139		425	13156
	725	17152	15s2-21	658	13934
	631	17207		612	13975
	597	17318		595	14032
	579	17424		587	14051
15s2-17	475	14030		568	14111
	459	14075		557	14132
	458	14129	15s2-22	618	17329
15s2-18	649	16489		607	17389
	642	16741		564	17477
	626	16930		564	17477
	621	17181		534	17705
	615	17237		531	17736
15s2-19	551	12026		510	18146
	522	12148	15s2-23	583	14445
	498	12154		556	14518
	484	12224		553	14667
	470	12324		549	14762
	464	12351		543	14831
	453	12378	15s2-24	458	14436

Instancia	Distancia	Latencia
	453	14444
	435	14445
15s2-25	566	13155
	558	13161
	546	13213
	541	13307

* No se pudo determinar alguna solución no dominada. Cada problema de AUGMECON2 dispuso de un tiempo de límite de 2 días para ser solucionado.

Apéndice D

Frentes de Pareto obtenidos por GRASP para instancias de 10, 15, 20 y 40 clientes

Instancia	Distancia	Latencia	Instancia	Distancia	Latencia
10s0-01	375	1401	10s0-08	394	1822
10s0-02	404	1857		396	1796
	408	1849		421	1728
	420	1665		428	1651
10s0-03	388	1672	10s0-09	374	1445
	397	1586		376	1441
	455	1573	10s0-10	444	1813
10s0-04	319	1383	10s0-11	455	2021
	340	1308		459	2005
	362	1282		491	1985
	364	1258		511	1983
10s0-05	415	1794	10s0-12	429	1936
	418	1735		441	1862
	436	1729		452	1825
10s0-06	310	1169	10s0-13	396	1885
	314	1092		409	1835
10s0-07	302	1210		414	1753
	303	1181		416	1736

Instancia	Distancia	Latencia	Instancia	Distancia	Latencia
	420	1707		420	1714
	420	1662		420	1620
10s0-14	389	1673		423	1425
	390	1589	10s0-22	448	1862
10s0-15	439	1958		460	1797
	445	1814		467	1789
	471	1811		492	1728
	472	1688		501	1644
10s0-16	338	1450		498	1618
	338	1424		506	1606
	340	1410		509	1551
	343	1382	10s0-23	408	1860
10s0-17	325	1391		411	1777
	344	1385		413	1604
10s0-18	355	1566		424	1592
	364	1552		425	1576
10s0-19	349	1620		444	1518
	351	1469	10s0-24	357	1683
	355	1416		373	1575
	361	1403		395	1568
	363	1378	10s0-25	409	1469
	365	1350		411	1429
10s0-20	402	1719		420	1396
	406	1567		422	1356
	423	1561		433	1346
	427	1551		434	1306
	433	1535	10s1-01	375	2451
10s0-21	416	1769		394	2405
	418	1722		395	2360

Instancia	Distancia	Latencia	Instancia	Distancia	Latencia
	398	2332	10s1-08	394	2571
10s1-02	404	2990		396	2530
	408	2975		412	2484
10s1-03	388	2773		417	2469
	389	2745		428	2277
	397	2645	10s1-09	374	2010
	398	2617		376	2007
	442	2539	10s1-10	444	2836
	455	2531	10s1-11	455	3085
	457	2511		459	3064
	478	2469	10s1-12	429	2674
	485	2459		441	2663
	500	2450		452	2640
10s1-04	313	2244		477	2631
	340	2223	10s1-13	396	3066
	348	2217		406	2989
	376	2214		409	2980
	379	2212		413	2974
10s1-05	415	3071		416	2905
	418	3006		416	2883
	432	2969		420	2857
	441	2965		437	2826
	446	2953		440	2794
10s1-06	310	2145	10s1-14	389	2489
	314	2058		390	2419
10s1-07	302	2511		409	2416
	302	2510	10s1-15	458	2968
	303	2444		439	2684
	303	2443		441	2670

Instancia	Distancia	Latencia	Instancia	Distancia	Latencia
	445	2516		420	2760
	469	2511		422	2721
	472	2408		423	2665
	480	2379		424	2647
10s1-16	338	2490	10s1-22	448	2667
	343	2486		454	2666
	344	2481		498	2377
	357	2480		509	2324
	359	2429	10s1-23	408	3191
	364	2425		411	3132
	365	2420		413	3018
10s1-17	325	2424		424	3013
	326	2420		425	2951
	371	2356	10s1-24	357	2908
10s1-18	355	2573		377	2890
	357	2531	10s1-25	409	2518
	386	2482		410	2507
	411	2455		429	2496
	435	2414		431	2488
10s1-19	349	2776	10s2-01	375	5453
	351	2429		377	5427
	355	2408		379	5412
	376	2338		384	5376
10s1-20	402	2434		386	5372
	406	2230		387	5349
	415	2219		379	5275
	432	2212		388	5272
10s1-21	416	3032		388	5210
	418	2997		389	5059

Instancia	Distancia	Latencia	Instancia	Distancia	Latencia
	390	5021		314	5237
	395	4954		316	5231
	397	4948		320	5218
	399	4918		423	5199
	408	4905		427	5169
	410	4845	10s2-07	302	4773
	419	4823		302	4740
	423	4780		303	4717
10s2-02	404	6419		364	4693
10s2-03	388	6037		365	4670
	389	6032	10s2-08	394	5791
	397	5947		396	5774
	398	5942		403	5772
	414	5909	10s2-09	374	5925
	415	5904		376	5910
	422	5894		386	5901
	423	5889		425	5892
	432	5866		446	5864
	433	5861	10s2-10	444	6402
10s2-04	319	5729		446	6401
	361	5723		446	6381
10s2-05	415	6412		448	6372
	418	6364		458	6174
	433	6356		460	6143
	436	6308	10s2-11	455	7421
	456	6123		457	7384
	483	5982	10s2-12	451	7311
	486	5968		452	7305
10s2-06	310	5250		462	7259

Instancia	Distancia	Latencia	Instancia	Distancia	Latencia
	474	7181		359	5679
	485	7146		404	5560
10s2-13	396	6544		409	5523
	406	6383		416	5469
	409	6139		424	5451
	410	6026	10s2-19	349	6096
	412	5948		355	6068
	418	5900		361	5989
	455	5889		362	5980
	462	5877		365	5945
	485	5840		394	5939
10s2-14	389	5802	10s2-20	402	7325
	390	5754		403	7212
	393	5732		405	7130
	441	5721		410	6942
	442	5716		454	6832
	442	5698	10s2-21	416	7298
	445	5686		418	7288
	446	5681		419	7215
10s2-15	439	6953		420	6649
	447	6940		423	6464
	454	6742		428	6419
	471	6702		430	6417
	524	6689	10s2-22	448	6564
10s2-16	338	5538		456	6519
10s2-17	325	5668		460	6467
	326	5430		463	6292
	328	5416		478	6188
10s2-18	355	5818		501	6153

Instancia	Distancia	Latencia	Instancia	Distancia	Latencia
	502	6143		562	3132
	526	6118	15s0-03	568	3880
	527	6108		584	3666
10s2-23	411	6054		567	3542
	413	5925		599	3490
	433	5909		628	3460
	438	5900	15s0-04	509	3073
	441	5803		511	3032
	444	5790		512	3016
	456	5784		514	3013
	457	5758		515	2997
10s2-24	357	5647		520	2970
	373	5340		527	2955
10s2-25	409	6165	15s0-05	554	3701
	414	6149		555	3643
	420	6121		558	3549
	425	6105		567	3203
	436	6077		591	3131
	441	6063	15s0-06	525	3522
	447	6055		526	3512
15s0-01	480	2817		527	3185
	484	2805		535	3179
	493	2757		554	3169
	497	2745		565	3159
15s0-02	517	3290		566	3135
	521	3281	15s0-07	577	3785
	538	3253		583	3733
	542	3247		598	3632
	556	3212		600	3367

Instancia	Distancia	Latencia	Instancia	Distancia	Latencia
	636	3364		565	3120
	647	3361		594	3082
	660	3355	15s0-12	555	3792
15s0-08	464	3068		560	3750
	467	3040		562	3511
	471	3024		563	3487
	473	3012	15s0-13	515	3389
	472	2874		520	3370
	475	2840		522	3335
	509	2795		531	3313
	540	2730		539	3248
	543	2710		557	3240
15s0-09	427	2461	15s0-14	521	3609
	433	2450		498	3225
	438	2410		555	3136
	438	2356		556	3132
	444	2345	15s0-15	520	3576
	449	2305		522	3462
	455	2301		523	3314
	456	2231		525	3206
	460	2229		533	3098
15s0-10	468	2912		546	3044
	487	2831		606	3040
	492	2818	15s0-16	579	3569
15s0-11	493	3268		604	3496
	494	3247		618	3464
	509	3221		630	3457
	540	3194		649	3419
	557	3126		653	3398

Instancia	Distancia	Latencia	Instancia	Distancia	Latencia
15s0-17	458	3010		629	3078
	461	3005	15s0-22	510	3425
	470	2968		510	3400
	481	2894		523	3393
	487	2872		531	3319
	528	2838		532	3305
15s0-18	638	4111	15s0-23	543	3771
	665	4102		552	3742
	672	4086		554	3674
	644	4046		556	3621
	677	3995		558	3468
	704	3971		562	3265
	709	3958	15s0-24	435	2881
15s0-19	429	2670		459	2869
	453	2651		480	2806
15s0-20	425	2842	15s0-25	541	3746
	432	2744		582	3658
	435	2677		596	3618
	438	2598		607	3612
	451	2509		610	3440
	463	2507		650	3431
15s0-21	557	3727	15s1-01	480	5236
	562	3597		484	5224
	563	3365		493	5195
	607	3201		497	5183
	608	3199		592	5167
	614	3178	15s1-02	517	5117
	615	3176		556	5010
	628	3080		582	4899

Instancia	Distancia	Latencia	Instancia	Distancia	Latencia
15s1-03	551	7170		472	5049
	616	7119		479	5005
	631	6951	15s1-09	427	5881
15s1-04	509	6076		438	5764
	511	6024	15s1-10	467	5748
	520	5904		468	5453
15s1-05	554	6578		484	5400
	555	6556		487	5199
	558	6432	15s1-11	493	6475
	567	6366		494	6415
	591	6342		497	6394
	617	6303		498	6342
	622	6218		549	6337
	623	6205		550	6304
	666	6197		562	6244
	667	6180		594	6183
15s1-06	525	5750	15s1-12	555	6827
	525	5736		559	6801
	527	5273		561	6797
15s1-07	577	6513		562	6410
	583	6351		563	6406
	600	6020		566	6380
	604	5959		567	6376
	606	5852		568	6374
	617	5748		569	6370
	623	5722	15s1-13	515	6251
	642	5656		522	6070
15s1-08	464	5313		539	6022
	471	5152		593	5982

Instancia	Distancia	Latencia	Instancia	Distancia	Latencia
15s1-14	498	6601		554	5240
	526	6082		555	5195
	535	6074	15s1-18	623	7085
	565	6012		621	6972
15s1-15	520	6402		625	6970
	522	6300		630	6622
	525	6226		634	6620
	527	6218	15s1-19	429	5086
	531	6186		444	4934
	532	5996		470	4932
	533	5836	15s1-20	425	6059
	546	5765		432	5904
15s1-16	579	7269		434	5896
	579	7258		439	5887
	585	7004		440	5878
	592	6959		442	5861
	598	6918		447	5852
	605	6860		462	5809
	617	6771		491	5743
15s1-17	458	5396	15s1-21	557	6233
	462	5388		563	6121
	474	5376		580	6045
	485	5355		581	6023
	489	5347		581	6022
	491	5346		582	6005
	528	5327		607	5910
	530	5325		608	5893
	544	5308		615	5890
	546	5255		628	5811

Instancia	Distancia	Latencia	Instancia	Distancia	Latencia
	629	5794		511	15195
15s1-22	510	6242		512	15140
	510	6217		529	15044
	511	6149		530	14989
	526	6120	15s2-02	517	13838
	535	6088		520	13731
	550	6074		524	13579
	575	6021		527	13511
	576	6014		531	13369
15s1-23	549	6762		556	13336
	545	6635	15s2-03	551	13368
	559	6590		551	12993
	564	6462		556	12899
	565	6436		567	12693
	571	6404		579	12659
	572	6397		597	12567
	578	6394		608	12389
	586	6353		637	12307
	591	6281	15s2-04	509	14212
	598	6235		517	14208
15s1-24	435	4618		523	14171
	437	4573		525	14134
15s1-25	549	6401		531	14097
	577	6299	15s2-05	554	15178
15s2-01	480	16225		555	15174
	488	15892		558	14936
	491	15827		564	14887
	500	15356		567	14827
	505	15328		572	14801

Instancia	Distancia	Latencia	Instancia	Distancia	Latencia
	594	14669		449	13362
	597	14634		450	13340
	610	14604		452	13275
	612	14548		459	13238
	625	14476		476	13164
	625	14265		502	13116
	630	14254		504	13085
	630	14252		506	13032
	630	14046		509	12945
	638	13990	15s2-10	467	11391
15s2-06	525	12090		468	11122
	526	12044		469	11066
	527	11812		470	11042
	566	11701		471	10986
15s2-07	598	18956		476	10960
	600	18077		487	10939
	606	17884		492	10908
	619	17864	15s2-11	497	12790
	623	17860		503	12250
15s2-08	464	13163		559	11916
	468	12642	15s2-12	555	18234
	486	12624		562	18127
	489	12614		563	18094
	489	12510		570	17967
15s2-09	427	13675		573	17957
	429	13654		587	17942
	437	13474		590	17932
	439	13451		593	17613
	445	13449	15s2-13	515	14253

Instancia	Distancia	Latencia	Instancia	Distancia	Latencia
	519	14157		556	14247
	521	14143		561	14214
	536	14136		567	14209
	541	14102		591	14173
	599	14082		593	14143
	600	14074		599	14112
	603	14065		602	14110
	604	14054		604	14084
15s2-14	513	17154	15s2-16	579	17424
	522	17038		583	17381
	525	17015		583	17348
	526	16757		593	17346
	542	16720		596	17339
	543	16487		601	17325
	550	16421		624	17273
	563	16260		635	17237
	564	16204		716	17167
15s2-15	520	15084	15s2-17	458	14129
	522	15066		475	14030
	523	14623	15s2-18	634	17389
	525	14618		639	17108
	526	14436		642	16741
	532	14410		649	16489
	536	14397	15s2-19	429	12508
	541	14351		430	12451
	546	14311		446	12433
	546	14297		447	12397
	551	14292		453	12378
	556	14248		464	12351

Instancia	Distancia	Latencia	Instancia	Distancia	Latencia
	470	12324		525	18003
	479	12233		531	17736
	484	12224		559	17484
	493	12158		564	17477
	498	12154		607	17389
	522	12148		611	17334
	548	12064		618	17329
	551	12026	15s2-23	549	14762
15s2-20	432	13223		556	14518
	436	13004		583	14445
	441	12962	15s2-24	435	14445
	460	12920		453	14444
	502	12855		458	14436
	505	12793	15s2-25	541	13307
	514	12773		546	13213
	516	12758		558	13161
	517	12711		566	13155
	519	12696	20s2-01	460	25901
	524	12659		461	25846
	541	12634		467	25839
	542	12616		468	25823
15s2-21	569	14549		474	25816
	557	14132		487	25808
	568	14111		488	25785
	585	14090		488	25754
	587	14051		494	25753
	595	14032		496	25739
15s2-22	510	18146		498	25366
	523	18018		499	25320

Instancia	Distancia	Latencia	Instancia	Distancia	Latencia
	502	25215		613	4863
	503	25168		614	4748
	509	25131		619	4637
	535	24731		660	4628
	536	24683	20s0-05	616	5591
	537	24663		617	5575
	538	24615		630	5282
	541	24606		643	5258
	549	24587		652	5180
	550	24580	20s0-06	549	5055
	552	24578		551	4989
	553	24571		554	4902
	560	24537		563	4885
	562	24532		575	4884
	567	23967		590	4870
	562	23904		597	4810
20s0-02	415	3133		617	4748
	415	2995		619	4668
	419	2993	20s0-07	534	4432
	422	2951		545	4417
	467	2947		546	4338
	473	2927		548	4324
20s0-03	472	4410		550	4318
	475	4402	20s0-08	584	4875
	493	4022		591	4693
20s0-04	609	5346		591	4687
	609	5236		599	4657
	609	4993		599	4651
	610	4875		606	4576

Instancia	Distancia	Latencia	Instancia	Distancia	Latencia
	607	4548		659	4981
	609	4532		669	4867
	615	4515		671	4858
	615	4506		674	4812
	625	4478		735	4776
	630	4477		739	4761
	633	4452	20s0-12	542	5037
	633	4433		544	5033
20s0-09	556	4456		548	5013
	563	4411		551	4935
	573	4343		557	4796
	567	4217		559	4637
	572	4199		567	4555
	581	4178		590	4531
20s0-10	631	5734		594	4446
	635	5727		617	4368
	640	5711	20s0-13	575	5098
	652	5682		587	5002
	652	5665		633	4946
	655	5602	20s0-14	585	4804
	658	5593		607	4782
	661	5587	20s0-15	512	4165
	669	5518		544	4131
	685	5512		549	4129
20s0-11	625	5404		554	4103
	631	5270		561	4020
	641	5247		596	3957
	656	5094	20s0-16	553	4347
	657	4990		555	4289

Instancia	Distancia	Latencia	Instancia	Distancia	Latencia
	559	4264		592	5512
	565	4262		594	5410
	578	4260		595	5402
20s0-17	483	4305		600	5158
	487	4292		601	5130
	489	4286		610	4992
	493	4269	20s0-21	540	4602
	497	4227		540	4516
	501	4214		541	4187
	503	4208	20s0-22	536	4617
	507	4191		537	4578
	508	4061		537	4472
	510	4046		540	4448
	514	3856	20s0-23	454	3806
	530	3816		459	3716
20s0-18	608	5583		465	3674
	608	5486		466	3521
	609	5423		468	3476
	615	5250		471	3416
	617	5246		513	3273
	617	5157		526	3237
	618	4941		540	3230
	633	4909	20s0-24	511	4240
	661	4908		528	4214
20s0-19	562	4773		539	4196
	565	4597	20s0-25	571	5061
	574	4584		572	4914
	678	4548	20s1-01	460	9152
20s0-20	590	5524		493	9134

Instancia	Distancia	Latencia	Instancia	Distancia	Latencia
	501	9118		623	10416
	515	8885		625	10413
	560	8814		628	10410
20s1-02	415	8400		643	10359
	417	8384		652	10189
	419	8375	20s1-06	551	8463
	426	8358		554	8444
	428	8347		554	8410
	451	8332		555	8368
	453	8323		557	8366
20s1-03	472	9458	20s1-07	534	9144
	474	9389		536	9138
	515	9326		540	9028
20s1-04	609	10898		545	8985
	609	10758		545	8967
	609	10570		546	8804
	610	10487		546	8786
	610	10471		548	8620
	611	10388		548	8602
	613	10384		566	8563
	613	10327		615	8495
	615	10324		616	8492
	621	10307		640	8487
	623	10050		641	8484
	626	10028	20s1-08	587	9369
	629	10016		589	9181
	639	10015		592	9123
20s1-05	616	10430		597	9099
	619	10424		598	9092

Instancia	Distancia	Latencia	Instancia	Distancia	Latencia
	604	8950		633	10333
	606	8910		643	10182
	606	8908		650	10100
	609	8875	20s1-12	541	10125
	611	8802		542	10099
	611	8779		544	9969
	618	8753		550	9902
	628	8541		552	9679
	632	8520		554	9645
20s1-09	567	10096		557	9636
	567	9557		559	9378
	584	9542		561	9366
	587	9486		565	9353
	588	9420		567	9282
	600	9392		572	9193
	589	9290		576	9128
	594	9273		579	9068
	599	9205		585	8988
	604	9188		591	8957
	629	9184		617	8829
	667	9148		619	8823
	672	9129		640	8814
20s1-10	635	10740		653	8676
	629	10654	20s1-13	586	10329
	671	10532		587	10298
	685	10392		592	10292
	686	10284		595	10237
	686	10254		590	10094
20s1-11	627	10610		602	10051

Instancia	Distancia	Latencia	Instancia	Distancia	Latencia
	608	10034		560	8807
	616	10010		564	8791
	620	9991		566	8751
	628	9967		579	8741
	661	9940		609	8739
	665	9914		616	8733
	688	9873		618	8722
20s1-14	585	9770		623	8720
	591	9585		635	8710
	596	9552		642	8697
	597	9504		645	8685
	605	9388		668	8659
20s1-15	512	8854		679	8647
	513	8809	20s1-17	496	8533
	514	8774		500	8532
	519	8769		504	8508
	523	8511		507	8466
	524	8476		508	8283
	529	8471		512	8282
	565	8453		541	8270
	567	8448		545	8236
	569	8433		546	8201
	570	8333		548	8188
	574	8302		548	8185
	580	8226		549	8180
	584	8162		552	8109
20s1-16	553	8956		564	8084
	554	8931		567	8048
	556	8922	20s1-18	607	9785

Instancia	Distancia	Latencia	Instancia	Distancia	Latencia
	608	9704		559	8706
	614	9690		568	8675
	615	9042		569	8664
	617	9003		573	8653
	617	8991		574	8387
	619	8952		575	8375
	625	8934		578	8372
	630	8930		579	8360
	632	8879		602	8336
	751	8876			
20s1-19	573	8623	20s1-22	535	9946
	588	8323		556	9942
	614	8260		560	9839
				566	9686
20s1-20	582	10924	20s1-23	454	9521
	581	10914		455	9456
	582	10911		456	9371
	583	10203		458	9309
	586	10158		459	9277
	600	9951		460	9237
	601	9901		461	9171
	603	9898		462	9085
	612	9606		472	9063
	612	9601		465	9036
20s1-21	539	9475		467	9032
	530	9355		470	8984
	530	8940		472	8980
	531	8910		479	8921
	539	8864		490	8847
	540	8715		495	8846

Instancia	Distancia	Latencia	Instancia	Distancia	Latencia
	501	8839		619	8837
	503	8765		621	8834
	510	8718		624	8823
20s1-24	505	9814		626	8820
	506	9799	20s2-01	460	25901
	510	9732		461	25846
	511	9716		467	25839
	516	9664		468	25823
	517	9648		474	25816
	533	9614		487	25808
	534	9599		488	25785
	539	9593		488	25754
	540	9577		494	25753
	543	9385		496	25739
	549	9275		498	25366
	561	9270		499	25320
	565	9251		502	25215
	577	9234		503	25168
20s1-25	571	9555		509	25131
	579	9405		535	24731
	599	9099		536	24683
	600	9097		537	24663
	600	9048		538	24615
	601	9046		541	24606
	602	8964		549	24587
	603	8913		550	24580
	605	8910		552	24578
	614	8864		553	24571
	616	8861		560	24537

Instancia	Distancia	Latencia	Instancia	Distancia	Latencia
	562	24532		561	20866
	567	23967	20s2-03	472	28857
	562	23904		475	28837
20s2-02	415	22386		479	28829
	416	22363		493	28515
	417	22345		495	28514
	418	22322		496	28513
	419	22281		512	28379
	421	21826		515	28331
	423	21777		531	27986
	423	21747	20s2-04	609	27700
	423	21554		609	27699
	424	21541		610	27661
	425	21515		610	27403
	429	21507		611	27393
	456	21487		611	27386
	460	21460		612	27376
	461	21437		614	27321
	462	21415		615	27210
	464	21393		618	27083
	465	21371		618	26943
	491	21352		619	26357
	514	21138		619	26344
	518	21108		619	26261
	521	21080		620	26134
	525	21062		621	26124
	533	20987		628	26117
	550	20950		629	26107
	553	20883		637	26101

Instancia	Distancia	Latencia	Instancia	Distancia	Latencia
	639	25941		551	25975
	642	25855		554	25843
	687	25854		555	25675
	688	25796		557	25598
	691	25780		559	25556
	765	25750		560	25486
	766	25730		562	25418
20s2-05	616	28059		574	25388
	617	27923		576	25387
	623	27762		579	25318
	626	27671		581	25273
	627	27585		587	25268
	630	27363		589	25223
	632	27212		641	25192
	632	26863		649	25150
	634	26849	20s2-07	542	25077
	635	26452		542	24308
	641	26411		568	23751
	645	26218		570	23746
	648	26201	20s2-08	578	26112
	648	25946		580	26079
	651	25926		582	25982
	661	25921		584	25963
	664	25901		586	25956
	672	25879		587	25932
	681	25838		591	25908
	700	25825		599	25888
	709	25808		600	25663
20s2-06	549	26027		600	25586

Instancia	Distancia	Latencia	Instancia	Distancia	Latencia
	602	25565	20s2-09	554	27878
	603	25540		554	27842
	605	25519		556	27468
	607	25473		556	27419
	607	25396		557	27384
	608	25382		567	26794
	610	25350		570	26771
	611	25336		572	26646
	613	25328		575	26623
	617	25322		577	26551
	618	25308		578	26501
	620	25300		581	26460
	643	25219		582	26433
	647	25157		583	26422
	648	25149		586	26307
	652	25133		588	26269
	653	25125		591	26246
	654	25122		595	26174
	655	25091		596	26150
	658	25028		598	26112
	662	25011		605	26017
	662	24972		634	25880
	666	24955		637	25864
	672	24943		640	25856
	683	24936		644	25773
	690	24837		647	25757
	696	24813		668	25751
	705	24738		671	25735
	728	24718		672	25697

Instancia	Distancia	Latencia	Instancia	Distancia	Latencia
	675	25681		550	29642
	705	25670		566	29606
	729	25574		568	29125
20s2-10	629	29636		571	29109
	632	29627		577	29097
	646	29162		585	29053
	654	28858		588	29040
	679	28485		597	28981
	681	28483		598	28560
	698	28449		600	28540
	711	28440		603	28527
	713	28436	20s2-13	575	26951
20s2-11	627	27531		571	26600
	625	26789		572	26559
	630	26760		572	26554
	632	26645		573	26513
	644	26357		575	26503
	651	26213		579	26499
	653	26171		579	26494
	667	26163		580	26453
	669	26147		582	26443
	678	25917		583	26436
	680	25881		583	26409
	693	25857		584	26395
	735	25830		584	26390
	737	25794		585	26349
20s2-12	569	29671		587	26339
	541	29665		588	25558
	544	29652		589	25523

Instancia	Distancia	Latencia	Instancia	Distancia	Latencia
	589	25518		513	25318
	590	25483		513	25212
	616	25429		534	24820
	617	25414		548	24585
	621	24986		550	24555
	629	24956		552	24535
	630	24915		553	24487
	631	24879		555	24457
	636	24874		556	24342
	637	24768		558	24314
20s2-14	596	26499		559	24295
	600	26442		560	24248
	603	26390		562	24220
	607	26333		598	24094
	611	26288		599	24071
	616	26287		596	24022
	619	26280		600	23999
	620	26266		602	23931
	623	26259		603	23858
	632	26211		611	23824
	633	25738		613	23759
	639	25524		626	23734
	639	25518		655	23678
	640	25459		659	23664
	700	25455	20s2-16	553	24567
	712	25420		554	24513
	714	25408		559	24175
	715	25250		561	24136
20s2-15	519	25457		563	24130

Instancia	Distancia	Latencia	Instancia	Distancia	Latencia
	571	24126		582	22166
	573	24098		587	22149
	575	24059		593	22072
	577	24053		600	22048
	577	24045		606	22036
	579	24039		608	22035
	587	24035		613	22012
	626	23774		615	22011
	628	23768	20s2-18	607	26760
	638	23738		608	26705
	640	23732		609	26528
	649	23728		614	26345
	669	23724		614	26310
20s2-17	483	23516		614	26138
	492	23498		615	25336
	497	22857		616	25320
	505	22818		630	25220
	511	22719		631	25019
	509	22673		632	25002
	510	22665		665	24999
	512	22389	20s2-19	558	26302
	513	22381		574	25591
	529	22371	20s2-20	589	25522
	545	22334		590	25472
	547	22328		580	24386
	560	22269		581	24375
	565	22239		583	24300
	566	22201		584	24277
	571	22171		585	24266

Instancia	Distancia	Latencia	Instancia	Distancia	Latencia
	588	24242		558	23893
	589	24231		578	23649
	591	23986		579	23630
	592	23975	20s2-23	454	24404
	594	23958		455	24239
	595	23947		459	24115
	601	23822		461	24030
	602	23811		464	23993
	603	23810		466	23920
20s2-21	539	26408		466	23704
	540	26357		470	23695
	540	26337		471	23604
	541	26286		475	22947
	542	26279		479	22908
	543	26276		481	22862
	544	26269		482	22766
	548	25702		486	22765
	550	25660		490	22753
	552	25629		491	22563
	560	25628		493	22326
	562	25597		496	22311
	577	25540		511	22173
	578	25475		512	22068
	580	25467		539	21993
	593	25423		548	21991
20s2-22	540	24300		552	21990
	541	24280		554	21989
	544	23915		559	21938
	545	23896		561	21931

Instancia	Distancia	Latencia	Instancia	Distancia	Latencia
20s2-24	511	23334		901	15278
	512	23290		903	15267
	539	23247		908	15258
	539	23141		914	15180
	540	23096		912	14885
	546	23048		929	14744
	547	23003	40s0-02	762	13246
	556	22977		764	13244
	563	22947	40s0-03	793	12857
	564	22492		789	12712
	569	22303		790	12670
	585	22236		800	12569
	588	22194		801	12527
20s2-25	579	22335	40s0-04	737	13146
	581	22236		742	13108
	587	22187		746	13002
	587	22155		746	12966
	595	21614		749	12935
	615	21472		750	12793
	617	21464		751	12658
	628	21433		756	12595
	630	21425	40s0-05	713	11540
	685	21384		714	11528
				715	11294
40s0-01	886	15739		716	11281
	887	15451		764	11182
	892	15447	40s0-06	706	13396
	894	15334		696	12886
	896	15323		697	12656
	901	15314			

Instancia	Distancia	Latencia	Instancia	Distancia	Latencia
	697	12546		638	10322
	698	12487		640	10161
	698	12464		671	10073
	699	12313		672	10046
	699	12128		676	9968
	709	11952		679	9946
	720	11902		680	9933
	723	11847		682	9814
	740	11834		702	9784
	749	11817		704	9665
	830	11714	40s0-09	810	14256
	834	11706		809	13933
	835	11595		809	13807
	843	11355		810	13659
	852	11320		810	13476
40s0-07	863	16248		811	13464
	838	15529		811	13327
	845	15450		812	13131
	877	15121		816	13099
	846	15027		817	12950
	973	14986		819	12858
	974	14970		823	12789
	976	14956		824	12782
	979	14944		828	12713
	993	14900		843	12647
40s0-08	633	10729		849	12591
	633	10514		852	12581
	634	10356		861	12575
	637	10336		867	12565

Instancia	Distancia	Latencia	Instancia	Distancia	Latencia
	870	12534		891	15064
	877	12501		887	14947
40s0-10	709	12598		888	14920
	716	12498		890	14887
40s0-11	681	12001		891	14860
	681	11840		898	14808
	683	11644		893	14765
	687	11420		894	14737
	732	11393		896	14707
	733	11175		897	14679
	751	11148		909	14667
	754	11089		910	14639
40s0-12	652	11561		912	14595
	655	11456		913	14567
	659	11355	40s0-14	661	11801
	703	11309		662	11466
	705	11256		664	11378
	712	11034		667	11108
	713	11002		677	11071
	715	10981		678	11058
	716	10886		678	10738
	718	10865		680	10668
	719	10842		681	10654
	720	10803		693	10623
	722	10471		694	10608
	723	10431		698	10607
40s0-13	886	15167	40s0-15	756	13140
	886	15161		756	13136
	887	15135		756	12381

Instancia	Distancia	Latencia	Instancia	Distancia	Latencia
40s0-16	929	17459		749	11230
	933	17193		746	11126
	934	17192		791	11089
	934	16670	40s0-18	824	14322
	935	16633		825	14221
	937	16485		820	13894
	939	16479		827	13821
	941	16445		830	13820
	941	16424		831	13819
	943	16416		838	13818
	945	16370		839	13817
	928	16156		839	13801
	929	16083		841	13725
	934	15990		843	13631
	935	15977	40s0-19	713	12533
	935	15913		731	12385
	936	15904		731	12381
	941	15810		730	12328
	942	15733		731	12280
	957	15724		732	12258
	958	15704		733	12120
	959	15670		737	11980
	963	15660		744	11925
				745	11906
40s0-17	722	12745		747	11600
	723	12692	40s0-20	724	13026
	729	12663		753	12834
	732	11570		755	12802
	734	11276	40s0-21	832	15345
	754	11271			

Instancia	Distancia	Latencia	Instancia	Distancia	Latencia
	811	14480		623	11111
	812	14169		626	11059
	807	14113		627	10826
	809	13848		640	10775
	813	13741		687	10587
	825	13680		693	10495
	829	13589		699	10490
40s0-22	762	13412		700	10478
	768	13174		706	10380
	779	13150	40s0-25	842	15384
	738	13103		831	14807
	743	13009		816	14312
	751	12935		819	14292
	752	12839		819	14210
	764	12754		821	14141
	767	12728		824	14114
	781	12631		826	13918
40s0-23	800	13453		828	13900
	801	13410		830	13886
	803	13217		832	13701
	804	13212		850	13693
	811	13208	40s1-01	871	37760
	812	13203		873	37731
	817	13176		881	37608
	818	13171		886	37576
	819	12865		892	37434
	820	12798		893	37234
	900	12774		894	37218
40s0-24	641	11264		895	37032

Instancia	Distancia	Latencia	Instancia	Distancia	Latencia
	929	36733		788	35365
	930	36580		789	35300
	931	36499		792	35258
	935	36495		793	35254
	937	36491		796	35220
	937	36280		797	35216
	939	36213		802	35199
	940	36093		803	35051
	946	36085		803	34924
	946	35948		804	34887
	943	35899		805	34883
	954	35874		806	34813
	1057	35867		807	34809
40s1-02	773	38239		808	34689
	768	37813		809	34624
	769	36986		813	34582
	770	36709		819	34581
	771	36538		819	34555
	772	36474		823	34539
	775	36121		858	34453
	776	36056		863	34322
	779	36037		856	34096
	781	36016		857	34095
	783	35750		837	33907
	784	35686		840	33906
	786	35667		843	33867
	785	35623		846	33866
	786	35586		848	33864
	787	35583		851	33863

Instancia	Distancia	Latencia	Instancia	Distancia	Latencia
40s1-03	830	33559		888	29923
	818	31918		888	29863
	819	31849		886	29505
	820	31730		888	29431
	822	31689		893	29403
	823	31540		895	29399
	826	31532		900	29371
	826	31463	40s1-04	745	33446
	828	31346		740	33356
	831	31338		743	33323
	838	31299		746	33151
	839	31221		748	33097
	842	31210		748	32709
	842	31144		751	32622
	843	31119		746	32313
	844	31041		749	32277
	845	31021		760	32249
	846	31000		766	32140
	849	30923		769	32107
	851	30820		770	31256
	852	30800		772	31080
	860	30714		774	30898
	865	30342		776	30722
	872	30312		787	30690
	897	30298		789	30480
	886	30164		791	30451
	887	30140		793	30445
	887	30131		795	30440
	888	30065		793	30180

Instancia	Distancia	Latencia	Instancia	Distancia	Latencia
	795	29970		744	33293
	797	29941		745	32935
	799	29935		746	32809
40s1-05	702	34306		747	32550
	702	34239		748	32525
	703	34172		749	32516
	703	34168		750	32362
	704	34162		751	32343
	704	34101		751	32337
	705	34048		752	32318
	706	33981		758	32123
	706	33977		759	31901
	707	33910		760	31876
	708	33890		764	31860
	709	33884		765	31840
	711	33873		765	31835
	712	33867		766	31815
	715	33829		767	31742
	716	33822		768	31688
	718	33812		769	31663
	719	33805		770	31652
	732	33804	40s1-06	706	36781
	733	33797		687	35532
	735	33750		689	34593
	736	33727		697	34582
	738	33712		702	34491
	739	33687		726	34415
	740	33664		750	34089
	743	33524		750	34000

Instancia	Distancia	Latencia	Instancia	Distancia	Latencia
	751	33849		1025	36199
	753	33826	40s1-08	613	34801
	754	33675		613	34768
	759	33541		616	34765
	764	33526		631	34608
	764	33426		626	34531
	769	33225		628	34477
	771	33219		628	34092
	772	33101		630	34069
	777	32901		636	32623
	782	32786		641	32593
	802	32760		645	32555
40s1-07	840	37568		649	31817
	845	37439		650	31814
	853	37354		651	31801
	852	37238		654	31793
	861	37159		654	31715
	870	37130		655	31702
	872	36593		667	31697
	875	36567		692	31672
	883	36560		693	31637
	886	36531	40s1-09	814	35078
	893	36398		816	34598
	896	36366		811	34573
	914	36363		812	34446
	932	36295		814	34342
	935	36266		814	34328
	1003	36211		815	34012
	1023	36206		815	33819

Instancia	Distancia	Latencia	Instancia	Distancia	Latencia
	816	33484		750	34593
	817	33387		751	34592
	818	33357		783	34550
	819	33356		785	34477
	820	33277		752	34284
	820	33203		753	34282
	821	33202		776	34281
	822	33123		777	34279
	823	33122		787	34124
	825	33087		788	34123
	826	33086		793	34036
	827	33062		794	34035
	827	33020		797	34031
	828	33019		798	34030
	830	32962	40s1-11	664	31220
	831	32961		665	31192
	851	32948		666	31008
	852	32947		666	30679
	891	32940		659	30328
	892	32939		660	30252
	894	32885		664	30188
	895	32884		671	30001
40s1-10	732	35344		674	29928
	735	35115		678	29562
	738	35093		682	29498
	737	34696		687	29447
	738	34695		692	29406
	745	34602		694	29398
	746	34601		696	29346

Instancia	Distancia	Latencia	Instancia	Distancia	Latencia
	713	29307	40s1-15	747	31157
40s1-12	680	33753		765	30819
	680	33630		767	30799
	687	33221		768	30529
	722	32584		769	30526
	726	32312		770	30509
	729	32149		771	30506
	733	32114		774	30069
40s1-13	859	36018		775	30065
	866	36010	40s1-16	921	45786
	867	35441		922	45711
	870	35249		923	45708
	875	34853		924	45651
	878	34658		925	45648
	885	34657		926	45628
	887	34512		929	45550
	894	34504		930	45547
	899	34385		932	45327
	939	34364		933	45324
	932	33997		938	44845
	934	33941		935	44632
40s1-14	665	29712		936	44628
	666	29705		938	44620
	669	29704		938	44603
	670	29697		939	44600
	671	29585		940	44593
	673	29549		940	44342
	675	29532		941	44213
	679	29524		942	44212

Instancia	Distancia	Latencia	Instancia	Distancia	Latencia
	944	44207		748	32746
	945	44206		752	32726
	955	44157		782	32684
	958	44118		786	32664
	983	43967		795	32596
	985	43870		799	32576
	988	43867	40s1-18	793	34450
	1000	43693		793	34274
	1026	43652		794	34225
40s1-17	712	35253		795	34047
	715	35250		796	33998
	728	35202		797	33981
	731	34576		798	33950
	732	34415		798	33932
	732	34245		800	33862
	735	34221		796	33626
	735	34027		797	33577
	736	33999		798	33477
	739	33939		799	33428
	741	33901		800	33243
	742	33873		802	33097
	745	33813		804	32996
	746	33793		807	32983
	750	33625		810	32980
	750	33607		811	32851
	754	33587		811	32812
	755	33392		812	32763
	746	33245		813	32761
	748	33228		814	32564

Instancia	Distancia	Latencia	Instancia	Distancia	Latencia
	815	32386		721	32859
	818	32373		726	32836
	821	32308		728	32770
	824	32295		731	32757
	824	32292		731	32683
	817	32178		732	32420
	820	32165		734	32261
	824	32157		735	32260
	825	32082		738	32247
	827	32028		738	32238
	828	31914		739	32237
	831	31907		742	32224
	831	31899		748	32169
	834	31892		750	32111
40s1-19	673	35177		749	32068
	674	33769		750	32027
	675	33758		753	32014
	678	33751		756	32011
	681	33710		763	31971
	682	33699		764	31917
	685	33692		767	31907
	690	33684		770	31904
	692	33434	40s1-20	720	35192
	695	33421		722	35184
	699	33418		724	35182
	700	33393		725	35175
	703	33380		726	35174
	717	32965		729	35151
	718	32869		729	35071

Instancia	Distancia	Latencia	Instancia	Distancia	Latencia
	733	35047		905	33609
	735	34993		906	33602
	743	34633		923	33518
	759	34613		924	33511
	760	34542		925	33487
	776	34496		926	33480
	784	34490		930	33469
	786	34479		931	33462
40s1-21	816	35584		932	33438
	818	34967		933	33431
	818	34802	40s1-22	723	36818
	819	34742		731	36202
	822	34487		732	35800
	823	34426		733	35605
	824	34296		743	35582
	825	34282		747	35549
	828	34197		751	35137
	831	34176		761	35134
	833	34096		765	35109
	834	34070		768	34891
	837	33968		778	34878
	840	33944	40s1-23	853	39070
	845	33938		856	38106
	896	33778		845	37824
	897	33772		835	37600
	898	33749		838	37418
	899	33743		840	37397
	903	33640		840	37379
	904	33633		841	37325

Instancia	Distancia	Latencia	Instancia	Distancia	Latencia
	838	37107		748	31894
	839	36993		749	31890
	841	36888		753	31798
	844	36871	40s1-25	828	38156
	845	36859		829	38145
	846	36822		829	38036
	846	36766		829	37943
	847	36655		830	37933
	845	36099		830	37759
	846	35985		830	37666
	857	35951		831	37591
	900	35905		831	37349
40s1-24	623	34400		832	36964
	626	34357		833	36962
	627	33822		834	36960
	631	33779		834	36918
	634	33733		835	36890
	641	33524		836	36876
	644	33514		837	36874
	648	33313		839	36863
	653	33237		840	36835
	655	32984		841	36821
	660	32883		842	36819
	708	32848		980	36671
	666	32482		986	36653
	673	32298		991	36620
	678	32197	40s2-01	883	101728
	726	32087		883	101648
	740	32002		884	101508

Instancia	Distancia	Latencia	Instancia	Distancia	Latencia
	886	101464		990	98162
	892	101460		996	98113
	893	100608		999	98085
	894	100467		1008	98073
	896	100255		1010	98069
	897	100219		1019	98034
	898	100121		1024	98001
	899	100085		1055	97858
	905	99863		1057	97842
	907	99832		1060	97825
	907	99731		1062	97809
	907	99693	40s2-02	765	96889
	909	99662		761	94883
	909	99559		762	94826
	911	99528		763	94783
	912	99459		764	94712
	912	99454		765	94638
	916	99385		766	94586
	922	99370		770	94534
	936	99169		771	94482
	937	99092		776	94464
	938	99033		778	94436
	939	98956		778	93512
	991	98773		779	93467
	982	98663		780	93080
	983	98598		780	92440
	984	98299		781	92387
	987	98271		782	92367
	987	98190		783	92314

Instancia	Distancia	Latencia	Instancia	Distancia	Latencia
	783	92118		796	108633
	785	92111		789	108600
	787	92076		790	108311
	789	92069		792	108260
	804	91767		792	107996
	806	91762		793	107985
	806	91761		794	107920
	807	91756		795	107909
	809	91751		796	107851
	815	91626		797	107840
	816	91218		798	107775
	818	91213		799	107764
	819	91209		801	107757
	821	91204		803	107654
	824	91202		804	107623
	833	91194		805	107612
	835	91189		809	107611
	841	90925		810	107600
	842	90882		812	107533
	844	90877		813	107001
	845	90873		816	106963
	847	90868		817	106737
	850	90866		820	106699
	859	90858		822	106641
	861	90853		826	106388
	879	90517		829	105969
	881	90503		837	105907
	883	90500		838	105567
40s2-03	815	109654		837	105115

Instancia	Distancia	Latencia	Instancia	Distancia	Latencia
	839	104779		932	103561
	840	104778		933	103548
	847	104741		936	103544
	844	104575		937	103531
	849	104566		968	103504
	880	104279		969	103491
	881	104226		975	103326
	906	104083		976	103313
	908	104065		978	103306
	909	104042		979	103305
	911	104011		979	103293
	914	103982		980	103260
	914	103968		981	103247
	915	103933		989	103211
	916	103906		990	103198
	917	103868		992	103191
	918	103792		993	103190
	919	103779		993	103178
	921	103772		994	103145
	922	103771		995	103132
	922	103759		1014	103111
	923	103726		1015	103098
	924	103713		1021	103075
	926	103703		1022	103062
	927	103627	40s2-04	753	89117
	928	103614		755	89109
	930	103607		757	88801
	931	103606		759	88789
	931	103594		761	88768

Instancia	Distancia	Latencia	Instancia	Distancia	Latencia
	763	88756		715	95238
	766	88754		715	94673
	767	88514		710	94616
	766	87190		713	94535
	768	87102		715	93698
	770	87101		718	93450
	770	87088		726	93296
	771	87045		727	93202
	772	87014		735	93048
	773	86958		736	93037
	775	86946		744	93021
	780	86682		745	93010
	781	86404	40s2-06	683	104959
	781	85768		675	103726
	783	85754		675	103684
	786	84941		679	103641
	788	84927		683	103426
	800	84718		683	103368
	802	84706		684	103329
	851	84286		685	102587
	852	84270		686	102548
	855	84269		688	102536
	859	84255		689	102497
40s2-05	716	97686		692	102254
	710	96700		693	102146
	697	96333		693	102050
	699	96096		695	101625
	706	96092		696	100521
	708	95415		697	100235

Instancia	Distancia	Latencia	Instancia	Distancia	Latencia
	699	100216		810	98705
	702	100215		838	98683
	706	100164		769	98445
	707	99838		766	98377
	709	99817		756	98293
	712	99816		757	98211
	719	99673		761	98171
	721	99652		769	98166
	724	99503		771	98143
	734	99241		773	98099
	739	99228		774	98057
	746	99100		775	97866
	751	99075		776	97822
	754	99045		780	97793
	763	99035		785	97787
	760	99033		786	97678
	761	98987		790	97660
	766	98973		803	97621
	769	98934		810	97615
	789	98905		820	97585
	790	98891		824	97578
	795	98862		851	97554
	796	98848		856	97547
	797	98824		864	97527
	798	98810	40s2-07	885	107246
	801	98764		878	107001
	802	98750		879	106627
	807	98741		873	106451
	809	98719		874	106240

Instancia	Distancia	Latencia	Instancia	Distancia	Latencia
	878	105713		1027	101804
	879	105328		1033	101793
	880	105116		1051	101792
	884	105084	40s2-08	663	91697
	901	105037		664	91397
	905	105005		662	91260
	915	104879		663	91241
	906	104597		665	91204
	907	104571		665	91150
	908	104268		668	90972
	909	104242		669	90955
	909	104073		671	90868
	910	104047		675	90778
	917	104042		676	90759
	934	103652		678	90668
	924	103501		680	90653
	926	103249		683	90638
	927	103103		684	90622
	928	103001		685	90570
	933	102601		686	90531
	937	102569		689	90405
	941	102568		694	90375
	945	102536		695	90335
	946	102499		697	90318
	954	102466		697	90307
	1016	102181		688	90150
	1017	101986		689	90130
	1019	101882		691	90037
	1040	101848		692	89979

Instancia	Distancia	Latencia	Instancia	Distancia	Latencia
	693	89960		778	87895
	695	89869		779	87876
	699	89684		780	87814
	700	89566		782	87767
	711	89450		783	87747
	712	89432		786	87732
	714	89343		787	87712
	722	89337		799	87695
	724	89299		833	87667
	727	89295		833	87664
	727	89250		840	87636
	728	89198	40s2-09	806	102572
	729	89180		805	101560
	731	88914		806	101469
	731	88879		807	101453
	733	88706		808	101444
	738	88691		809	101428
	753	88541		810	101173
	755	88498		811	101082
	756	88480		812	100917
	757	88419		812	100753
	759	88374		813	100662
	760	88355		814	100646
	763	88339		816	100639
	764	88320		818	100390
	773	88312		825	99944
	775	88309		826	99862
	775	88284		836	99500
	776	87940		854	99440

Instancia	Distancia	Latencia	Instancia	Distancia	Latencia
	858	99331		875	96085
	862	99324		876	96008
	862	99264		877	96004
	864	99235		883	95999
	832	99022		884	95995
	839	98821		885	95965
	835	98573		886	95961
	848	98562		893	95958
	874	98471		894	95954
	875	98315		969	95933
	877	97846		972	95870
	878	97769	40s2-10	711	105487
	878	97454		712	104980
	879	97317		710	104727
	879	97269		712	104723
	881	97267		713	102957
	882	97238		715	102953
	882	97150		718	102850
	882	97148		719	102753
	884	97033		719	102671
	896	97019		720	102615
	903	96816		721	102584
	904	96807		722	102528
	907	96762		724	102168
	902	96710		725	101390
	874	96181		727	101386
	866	96096		730	101283
	867	96092		723	99738
	874	96089		723	99598

Instancia	Distancia	Latencia	Instancia	Distancia	Latencia
	726	99485		871	98507
	727	99471		873	98402
	738	99446		871	98381
	739	99432		872	98375
	754	99424		872	98335
	757	99271		873	98329
	759	99164		876	98295
	760	99161		877	98283
	761	99148		880	98266
	762	99054		881	98261
	763	99041		881	98251
	774	99014		882	98246
	775	98962		889	98237
	776	98960		890	98232
	777	98948		892	98227
	778	98855		893	98222
	779	98843	40s2-11	723	98632
	790	98827		698	95516
	791	98815		687	95367
	807	98803		688	95301
	808	98790		689	95298
	809	98785		690	93947
	810	98772		691	93943
	813	98754		694	93941
	815	98649		695	93936
	816	98647		700	93931
	817	98635		701	93927
	818	98542		702	93592
	819	98530		703	93588

Instancia	Distancia	Latencia	Instancia	Distancia	Latencia
	706	93586		782	91805
	707	93581		784	91803
	710	93560		785	91792
	711	93556		791	91514
	714	93554		794	91351
	715	93549		797	91313
	720	93512		798	91281
	726	93509		801	91121
	726	93419		804	91086
	727	93339		809	91081
	732	93287		811	91030
	734	93267		816	91025
	736	93222		826	91015
	726	93195		829	90983
	731	93034		831	90864
	732	92824	40s2-12	664	101582
	740	92743		666	101546
	744	92680		668	101315
	748	92408		666	101310
	751	92364		668	101274
	755	92216		669	101102
	758	92192		669	100998
	758	92175		670	100469
	763	92109		672	100457
	765	92107		672	100431
	766	92065		674	100170
	770	91908		676	99463
	773	91867		677	99406
	780	91808		679	99298

Instancia	Distancia	Latencia	Instancia	Distancia	Latencia
	681	99244	40s2-13	883	101119
	680	99231		884	99901
	682	99200		885	99847
	682	99173		888	99833
	683	99129		888	99811
	686	98631		891	99466
	687	98532		892	99412
	688	97918		892	98988
	691	97730		892	98518
	700	97614		893	98463
	704	97534		896	98443
	705	97523		900	98089
	710	97416		901	98034
	712	96895		903	97679
	715	96870		904	97623
	720	96829		906	97574
	721	96818		909	97551
	723	96804		911	97242
	724	96793		912	97186
	725	96615		914	97137
	728	96593		916	97108
	733	96557		919	97079
	736	96535		927	97053
	742	96503		930	97030
	745	96481		932	97001
	759	96449		935	96972
	762	96423		937	96835
	804	96377		938	96823
	805	96374		939	96616

Instancia	Distancia	Latencia	Instancia	Distancia	Latencia
	941	96447		682	92017
	941	96429		682	92012
	942	96424		683	92009
	944	96421		685	91661
	944	96403		686	91406
	945	96395		686	91261
	958	96364		687	91229
	958	96346		688	91225
	959	96341		691	91218
	961	96338		692	90784
	961	96320		693	90783
	962	96312		695	90741
	976	96310		697	90698
	976	96292		698	90661
	977	96284		693	90630
	986	96276		694	90584
	1001	96275		697	90355
	1002	96267		688	90180
	1101	96000		692	90160
	1102	95952		693	89951
	1108	95902		694	89924
	1109	95854		694	89756
40s2-14	685	93848		696	89571
	681	93399		700	89555
	682	93299		701	89537
	678	93256		699	89241
	679	93209		704	89193
	677	92829		705	89152
	681	92055		706	88654

Instancia	Distancia	Latencia	Instancia	Distancia	Latencia
709	88628		764	87243	
711	88611		765	87169	
713	88601		766	87168	
714	88585		769	87141	
715	88442		772	87120	
720	88399		773	87119	
721	88280		775	87095	
726	88247		776	87092	
729	88234		778	87066	
730	88230		778	87020	
731	88228		779	87017	
732	88150		782	86770	
735	87954		783	86769	
738	87708		786	86742	
741	87679		805	86439	
742	87672		809	86238	
743	87655		814	86200	
745	87548		852	86109	
748	87519		825	85844	
749	87512		830	85841	
750	87500		832	85744	
752	87465		837	85741	
754	87464		848	85711	
755	87436		853	85673	
755	87388		862	85401	
758	87364		871	85399	
758	87293		871	85384	
759	87286		880	85382	
763	87250		889	85206	

Instancia	Distancia	Latencia	Instancia	Distancia	Latencia
	891	85193		782	98065
	898	85151		786	98054
	900	85140		786	98006
	901	85105		790	97995
	905	85073		793	97944
	907	85062		797	97933
	908	85027		797	97885
	915	85002		801	97874
	917	84991		811	97850
	918	84956		808	97814
40s2-15	747	101767		812	97755
	751	101756		833	97710
	761	101614		904	97662
	765	101603		905	97642
	775	101579		905	97640
	773	101279		906	97620
	773	101277		908	97603
	774	100940		909	97583
	766	100671		909	97581
	769	100538		910	97561
	773	100531		900	97539
	775	99630		901	97507
	772	98758		902	97494
	776	98747		910	97492
	782	98738		911	97479
	783	98532		915	97470
	785	98188		916	97438
	789	98177		917	97425
	793	98086		925	97423

Instancia	Distancia	Latencia	Instancia	Distancia	Latencia
40s2-16	926	97410		978	113135
	957	118475		979	113116
	935	115630		979	113064
	936	115495		981	112999
	936	115252		982	112928
	936	115088		985	112858
	936	115056		989	112833
	937	114953		1034	112748
	937	114921		1033	112440
	938	114724		1037	112316
	939	114590		1038	111937
	939	114516		1044	111790
	940	114383		1046	111623
	942	114380		1047	111607
	943	114247		1052	111479
	946	114177		1053	111463
	953	113688		1056	111430
	954	113526		1057	111415
	956	113468		1058	111412
	957	113390		1068	111267
	959	113332		1078	111155
	960	113320		1081	111069
	962	113262	40s2-17	733	105330
	966	113249		735	105141
	967	113237		737	104990
	968	113228		737	104774
	969	113179		738	104700
	973	113150		740	104549
	975	113145		743	104513

Instancia	Distancia	Latencia	Instancia	Distancia	Latencia
	745	104013		790	102016
	746	104010		793	101990
	747	103999		793	101808
	747	103983		796	101785
	748	103872		798	101605
	749	103869		801	101582
	749	103808		804	101478
	752	103782		807	101455
	754	103673		813	101444
	755	103670		816	101337
	756	103643		819	101317
	758	103638		830	101299
	759	103635		862	101294
	760	103608	40s2-18	795	106194
	762	103556		798	105290
	763	103531		801	105209
	764	103503		807	104816
	764	102824		803	104002
	767	102798		807	103534
	767	102616		810	103041
	770	102593		811	103012
	779	102488		814	103007
	779	102475		820	102853
	782	102347		821	102727
	785	102302		822	102709
	786	102277		823	102434
	788	102220		824	102366
	788	102097		839	102332
	789	102072		840	102078

Instancia	Distancia	Latencia	Instancia	Distancia	Latencia
	842	102071		706	93281
	843	101835		699	93213
	845	101830		699	93064
	847	101814		700	92844
	848	101663		704	92837
	849	101616		704	92703
	850	101516		715	92610
	852	101511		723	92535
	855	101344		759	92525
	856	101297		770	92524
	858	101256		726	92502
	860	101251		784	92461
	862	101241		801	92431
	864	101193		805	92398
	865	100955		809	92342
	867	100950	40s2-20	735	101117
	870	100943		723	100487
	872	100781		723	99959
	874	100774		727	99931
	881	100762		734	99640
40s2-19	674	95144		735	99619
	675	95126		738	99612
	679	94401		738	99335
	680	94324		739	99314
	687	93553		742	99307
	688	93474		743	99286
	702	93466		745	99257
	705	93432		748	99013
	709	93397		752	98422

Instancia	Distancia	Latencia	Instancia	Distancia	Latencia
	755	97985		830	106452
	758	97623		836	106304
	761	97085		830	106301
	764	96700		831	106156
	768	96696		834	106140
	768	96342		840	105787
	772	96338		840	105460
	776	96200		843	105221
	782	95998		846	105187
	784	95908		848	105156
	810	95627		849	105038
40s2-21	835	109741		850	104695
	835	109679		851	104453
	836	109648		853	104452
	837	109643		854	104306
	839	108578		856	104305
	837	108427		865	104302
	832	108404		867	103976
	834	108401		867	103962
	837	108398		868	103930
	839	108141		869	103912
	839	108138		870	103818
	841	108135		871	103807
	844	108116		867	103774
	846	108113		868	103744
	831	108024		868	103740
	829	107322		869	103710
	829	107275		872	103688
	830	106499		880	103668

Instancia	Distancia	Latencia	Instancia	Distancia	Latencia
	880	103664		730	97169
	881	103634		731	96694
	884	103612		739	96243
	916	103598		740	96153
	917	103565		752	96152
	920	103442		754	96149
	921	103410		755	96059
	935	103302		759	95721
	936	103269		774	95627
	938	103245		780	95602
	943	103123		790	95567
	948	103045		805	95542
	950	103038		809	95464
	912	102715		815	95445
	915	102630		829	95437
	920	102629		823	95390
	930	102625		824	95160
	935	102624		826	95155
	951	102579		831	95071
	956	102578		853	95032
	957	102560		860	94989
	964	102539		865	94926
	970	102354		866	94695
	1043	102317		868	94688
40s2-22	720	98093		873	94508
	721	97653	40s2-23	804	97846
	726	97458		805	97821
	726	97448		806	97806
	729	97396		809	97794

Instancia	Distancia	Latencia	Instancia	Distancia	Latencia
	811	97792		932	96232
	814	97713		933	96125
	815	97688		941	95919
	816	97674		943	95867
	819	97662		944	95839
	821	97660		945	95715
	831	97617		948	95658
	831	97568	40s2-24	636	100424
	832	97543		634	99731
	833	97529		633	99593
	834	97519		634	99569
	879	97472		635	99252
	882	97471		636	99023
	885	97216		637	98999
	880	97215		638	98680
	881	97175		639	98656
	883	97004		641	98654
	886	96762		641	98637
	888	96753		641	98340
	891	96685		642	98316
	895	96677		644	98314
	897	96573		644	98297
	899	96562		645	98290
	900	96558		646	98278
	901	96548		647	97960
	902	96547		648	97937
	902	96485		650	97920
	905	96470		650	97623
	906	96460		651	97600

Instancia	Distancia	Latencia	Instancia	Distancia	Latencia
	653	97583		850	107129
	654	97577		850	106496
	655	97568		851	106385
	656	96930		853	106341
	659	96904		858	106216
	662	96737		855	106120
	664	96384		856	106009
	665	96252		859	105424
	668	96229		860	105418
	669	96198		861	105378
	669	96118		862	105372
	671	95504		867	105367
	674	95481		863	105292
	674	95090		864	105043
	676	94423		865	105037
	678	93779		868	104886
	681	93756		869	104880
	684	93523		870	104855
	687	93500		871	104849
	690	93468		875	104805
	691	92991		876	104799
	691	92912		881	104457
	694	92371		881	104435
	697	92342		882	104429
	746	92299		886	104371
	764	92214		887	104365
	764	92181		901	104336
	771	92134		908	104331
40s2-25	860	108614		921	103900

Instancia	Distancia	Latencia
	928	103895
	1020	103828

Apéndice E

Frentes de Pareto obtenidos por NSGA-II para instancias de 10, 15, 20 y 40 clientes

Instancia	Distancia	Latencia	Instancia	Distancia	Latencia
10s0-01	375	1401		396	1796
10s0-02	404	1857		421	1728
	408	1849		428	1651
	420	1665	10s0-09	374	1445
10s0-03	397	1586		376	1441
	455	1573	10s0-10	444	1813
10s0-04	319	1573	10s0-11	455	2021
	322	1435		459	2005
	330	1403		491	1985
	340	1308		511	1983
10s0-05	415	1794	10s0-12	429	1936
	418	1735		441	1862
	436	1729		452	1825
10s0-06	310	1169	10s0-13	409	1861
	314	1092		410	1859
10s0-07	302	1210		412	1851
	303	1181		414	1753
10s0-08	394	1822		416	1739

Instancia	Distancia	Latencia	Instancia	Distancia	Latencia
	420	1707		420	1620
	437	1666		423	1425
	441	1664	10s0-22	453	2095
10s0-14	389	1673		459	2021
	417	1665		460	1902
	466	1661		467	1789
10s0-15	439	1958		498	1618
	445	1814		506	1606
	472	1688		509	1551
10s0-16	338	1424	10s0-23	413	1604
	340	1410		424	1592
	343	1382		425	1576
10s0-17	325	1391		444	1518
10s0-18	355	1566	10s0-24	357	1683
	364	1552		372	1607
10s0-19	349	1620		373	1575
	351	1469		395	1568
	353	1444	10s0-25	409	1469
	355	1416		411	1429
	361	1403		420	1396
	363	1378		422	1356
	365	1350		434	1306
10s0-20	402	1719	10s1-01	375	2451
	406	1567		401	2401
	423	1561		404	2366
	427	1551	10s1-02	404	2990
	433	1535		408	2975
10s0-21	416	1769	10s1-03	397	2645
	418	1722		398	2617

Instancia	Distancia	Latencia	Instancia	Distancia	Latencia
	442	2539	10s1-15	439	2684
	455	2531		441	2670
	457	2511		445	2516
10s1-04	340	2223		469	2511
10s1-05	432	2969		472	2408
	441	2965		480	2379
	446	2953	10s1-16	338	2490
10s1-06	310	2145		346	2486
	314	2058		357	2480
10s1-07	302	2510		359	2429
	303	2443		364	2425
10s1-08	394	2571		365	2420
	396	2530	10s1-17	325	2418
	428	2277		393	2400
10s1-09	374	2010	10s1-18	355	2573
10s1-10	444	2836		357	2531
10s1-11	455	3085		386	2482
	459	3064		433	2464
10s1-12	441	2663		435	2414
	452	2640	10s1-19	349	2776
	477	2631		353	2743
10s1-13	409	3119		362	2646
	414	2963		369	2418
	420	2894		375	2416
	433	2863		376	2338
	437	2826	10s1-20	402	2434
	440	2794		406	2230
10s1-14	389	2489		415	2219
	390	2419		432	2212

Instancia	Distancia	Latencia	Instancia	Distancia	Latencia
10s1-21	420	2760		419	4823
	422	2721	10s2-02	404	6419
	423	2665	10s2-03	388	6037
	424	2647		389	6032
10s1-22	448	2667		397	5947
	454	2666		414	5909
	498	2377		415	5904
	509	2324		422	5894
10s1-23	413	3018		423	5889
	424	3013		432	5866
	425	2951		433	5861
10s1-24	357	2908	10s2-04	319	5729
10s1-25	409	2518		361	5723
	410	2507	10s2-05	415	6412
	429	2496		418	6364
	431	2488		433	6356
10s2-01	376	5510		436	6308
	377	5427		446	6269
	379	5412		452	6247
	386	5372		456	6123
	388	5210		482	6115
	389	5059		483	5982
	397	5040		486	5968
	399	5008	10s2-06	314	5237
	400	4967		316	5231
	405	4956		320	5218
	406	4937		423	5199
	408	4905		427	5169
	410	4845	10s2-07	302	4740

Instancia	Distancia	Latencia	Instancia	Distancia	Latencia
	303	4717		442	5698
10s2-08	394	5791		445	5686
	396	5774		446	5681
	403	5772	10s2-15	467	6960
10s2-09	375	5927		473	6771
	383	5916		524	6689
	386	5901	10s2-16	343	5614
	414	5870		366	5603
10s2-10	435	5865		409	5551
	444	6402	10s2-17	325	5668
	446	6381		326	5430
	448	6372		328	5416
	458	6174	10s2-18	355	5818
10s2-11	460	6143		359	5679
	455	7421		392	5662
	457	7384		404	5560
10s2-12	451	7311		409	5523
	452	7305	10s2-19	416	5469
	462	7259		424	5451
	474	7181		349	6096
	485	7146		355	6068
10s2-13	410	6026		361	5989
	412	5948		362	5980
	462	5877		365	5945
	485	5840		394	5939
10s2-14	389	5802	10s2-20	406	7227
	390	5754		410	6942
	438	5733		481	6919
	441	5721		498	6909

Instancia	Distancia	Latencia	Instancia	Distancia	Latencia
10s2-21	420	6649		441	6063
	423	6464		447	6055
	428	6419	15s0-01	484	2805
	430	6417		493	2757
10s2-22	448	6564		497	2745
	456	6519	15s0-02	517	3290
	460	6467		521	3281
	473	6463		556	3212
	477	6394		562	3188
	478	6188	15s0-03	554	3634
	501	6153		567	3542
	502	6143		569	3524
	526	6118		631	3398
	527	6108	15s0-04	509	3073
10s2-23	413	5925		512	3016
	433	5909		515	2997
	438	5900		568	2978
	441	5803	15s0-05	554	3701
	444	5790		555	3643
	456	5784		558	3549
	457	5758		567	3203
10s2-24	357	5647		591	3131
	372	5442	15s0-06	526	3512
	373	5340		527	3185
10s2-25	409	6165		535	3179
	414	6164		554	3169
	420	6121		565	3159
	425	6105		566	3135
	436	6077	15s0-07	577	3785

Instancia	Distancia	Latencia	Instancia	Distancia	Latencia
	583	3733	15s0-12	555	3792
	598	3632		560	3750
	600	3367		562	3511
	636	3364		563	3487
	647	3361	15s0-13	517	3590
15s0-08	464	3068		524	3344
	467	3040		539	3248
	485	3026		606	3238
	489	2936	15s0-14	510	3320
	509	2795		515	3319
	540	2730		548	3318
	543	2710		551	3287
15s0-09	437	2475		555	3136
	438	2410		556	3132
	448	2370	15s0-15	520	3576
	449	2305		522	3462
	455	2301		523	3314
	456	2231		525	3206
	460	2229		533	3098
15s0-10	468	2912		546	3044
	487	2831		606	3040
	492	2818	15s0-16	579	3569
15s0-11	516	3374		604	3496
	520	3280		618	3464
	544	3259		649	3419
	553	3249	15s0-17	461	3005
	557	3126		470	2968
	565	3120		481	2894
	594	3082		487	2872

Instancia	Distancia	Latencia	Instancia	Distancia	Latencia
	528	2838	15s0-23	543	3771
15s0-18	615	4272		556	3621
	621	4150		558	3581
	627	4144		562	3265
	643	4006	15s0-24	435	2881
	676	3955	15s0-25	549	3521
15s0-19	429	2670	15s1-01	480	5236
	453	2651		484	5224
	477	2649		493	5195
	488	2643		497	5183
15s0-20	425	2842		592	5167
	432	2744	15s1-02	517	5566
	435	2677		523	5198
	438	2598		531	5177
	451	2509		533	5152
	463	2507		556	5010
15s0-21	557	3727		582	4899
	562	3597	15s1-03	551	7226
	563	3365		645	7162
	609	3189		650	7161
	611	3171		668	7016
	612	3120	15s1-04	509	6076
	628	3080		511	6024
	629	3078		520	5904
15s0-22	510	3400	15s1-05	554	6578
	523	3393		555	6556
	593	3389		558	6432
	596	3321		567	6366
	617	3319		591	6342

Instancia	Distancia	Latencia	Instancia	Distancia	Latencia
	641	6242		566	6380
	642	6229		567	6376
	645	6183		568	6374
	647	6176		569	6370
	648	6163	15s1-13	515	6251
15s1-06	526	5749		522	6070
	527	5273		575	6007
15s1-07	598	6476	15s1-14	530	6863
	600	6020		531	6227
	606	5852		540	6219
	617	5748		562	6181
	623	5722		565	6012
	642	5656	15s1-15	533	5836
15s1-08	464	5313		546	5765
	468	5296	15s1-16	582	7049
	471	5152		586	6935
	479	5005		593	6881
15s1-09	427	5881		617	6771
	438	5764	15s1-17	458	5396
15s1-10	473	5511		462	5388
	487	5199		474	5376
15s1-11	505	6658		485	5355
	506	6637		489	5347
	557	6373		491	5346
	565	6325		530	5325
	575	6257		546	5255
	594	6183		554	5240
15s1-12	562	6410		555	5195
	563	6406	15s1-18	623	7085

Instancia	Distancia	Latencia	Instancia	Distancia	Latencia
	632	6910		586	6353
	634	6620		591	6281
15s1-19	429	5086		598	6235
	444	4934	15s1-24	435	4618
	470	4932		437	4573
15s1-20	432	6010	15s1-25	547	6527
	439	5968		549	6430
	442	5878		551	6291
	462	5809	15s2-01	480	16225
	491	5743		488	15892
15s1-21	589	6175		491	15827
	606	6025		511	15195
	607	5910		512	15140
	608	5893		529	15044
	615	5890		530	14989
	628	5811	15s2-02	517	13838
	629	5794		524	13579
15s1-22	510	6217		527	13511
	511	6149		531	13369
	526	6120		556	13336
	535	6088	15s2-03	567	12693
	550	6074		594	12671
	574	6047		604	12587
	575	6021		608	12389
	576	6014		637	12307
15s1-23	552	6683	15s2-04	509	14432
	558	6603		511	14395
	571	6404		516	14295
	579	6399		517	14208

Instancia	Distancia	Latencia	Instancia	Distancia	Latencia
	523	14171		450	13340
	525	14134		469	13325
	531	14097		502	13116
15s2-05	570	14986		503	13085
	588	14901		505	13054
	590	14866		511	13028
	595	14804		521	13011
	620	14689		525	13007
	624	14580		528	12980
	625	14265		537	12969
	630	14046	15s2-10	470	11042
	638	13990		471	10986
15s2-06	525	12090		487	10939
	526	12044		508	10910
	527	11812		513	10900
	566	11701	15s2-11	497	12790
15s2-07	598	18956		503	12250
	600	18077		559	11916
	606	17884	15s2-12	561	18415
	619	17864		563	18352
	623	17860		598	17714
15s2-08	472	13132		673	17677
	476	13049	15s2-13	519	14157
	477	13044		535	14149
	478	12964		540	14115
	479	12662		600	14074
	489	12510		603	14065
15s2-09	429	13654	15s2-14	527	17843
	449	13362		530	17316

Instancia	Distancia	Latencia	Instancia	Distancia	Latencia
	531	17276		649	16489
	535	17265	15s2-19	429	12508
	538	17148		430	12451
	542	17093		446	12433
	543	16487		447	12397
	550	16421		453	12378
	563	16260		460	12369
	564	16204		464	12351
15s2-15	547	14741		470	12324
	548	14316		481	12297
	556	14247		552	12246
	561	14214		579	12084
	579	14201		581	12036
	584	14168		586	12032
	606	14153	15s2-20	432	13247
	626	13994		434	13150
	632	13980		436	13004
15s2-16	585	17462		441	12962
	592	17354		448	12890
	615	17339		449	12884
	617	17318		502	12855
	618	17218		505	12793
	631	17207		514	12773
	748	17173		516	12758
	764	17139		517	12711
15s2-17	458	14129		519	12696
	459	14075		524	12659
15s2-18	632	16994		543	12636
	642	16741	15s2-21	562	14195

Instancia	Distancia	Latencia	Instancia	Distancia	Latencia
	563	14146		597	13204
	568	14111	20s2-01	521	25292
	585	14090		543	25243
	587	14051		548	25014
	595	14032		551	24872
	612	13975		556	24725
	649	13960		557	24652
	658	13934		558	24589
15s2-22	510	18146		560	24564
	525	18136		562	23904
	531	17736	20s0-02	416	3118
	534	17705		419	3081
	563	17556		467	2990
	592	17480		485	2979
	599	17475		489	2921
	607	17389		490	2905
	611	17334		491	2896
	618	17329	20s0-03	472	4410
15s2-23	553	14667		475	4402
	556	14518		493	4022
	583	14445	20s0-04	626	5311
15s2-24	435	14445		628	5276
	453	14444		629	5105
	458	14436		630	4992
15s2-25	555	13619		632	4744
	566	13524		636	4693
	571	13406		637	4582
	574	13318		648	4551
	579	13238	20s0-05	632	5595

Instancia	Distancia	Latencia	Instancia	Distancia	Latencia
	633	5292		567	4217
	638	5286		572	4199
	640	5285		581	4178
	641	5284	20s0-10	635	5791
	643	5258		646	5651
	652	5180		666	5560
	681	5142		669	5518
	682	5111		685	5512
	683	5110	20s0-11	630	5539
20s0-06	549	5055		631	5517
	551	4989		632	5365
	554	4902		676	5116
	555	4802		681	5098
	559	4764		686	4875
20s0-07	544	4733		689	4850
	545	4417		691	4841
	546	4338		696	4815
	548	4324	20s0-12	555	5008
	550	4318		561	4978
20s0-08	589	4798		567	4972
	595	4748		584	4740
	597	4701		590	4531
	606	4576		593	4436
	607	4548		616	4385
	609	4532		617	4373
	625	4478		619	4360
	630	4477	20s0-13	575	5270
	633	4433		576	5230
20s0-09	563	4411		611	5051

Instancia	Distancia	Latencia	Instancia	Distancia	Latencia
	612	5011		611	5015
	633	4946		612	4951
20s0-14	585	4804		613	4906
	607	4782	20s0-21	531	4741
20s0-15	538	4012		532	4438
	543	4010		533	4423
	544	3906		539	4412
20s0-16	553	4347		541	4187
	555	4289	20s0-22	535	4436
	559	4264		561	4433
	565	4262	20s0-23	459	3716
	578	4260		466	3694
	640	4257		483	3653
20s0-17	504	4217		513	3273
	508	4061		526	3237
	511	4049		553	3195
	514	3856	20s0-24	511	4240
	530	3816		528	4214
20s0-18	617	5157		539	4196
	618	4941	20s0-25	579	5151
	619	4918		580	5004
	633	4909		582	4998
	661	4908		583	4906
20s0-19	558	4502	20s1-01	470	9557
20s0-20	589	5363		474	9344
	590	5234		491	9245
	591	5200		518	9241
	603	5116		521	9078
	607	5106		522	9066

Instancia	Distancia	Latencia	Instancia	Distancia	Latencia
	593	8981		647	10351
	594	8978		652	10189
	601	8945	20s1-06	551	8463
	603	8854		555	8421
20s1-02	415	8514		556	8408
	417	8505	20s1-07	540	9028
	437	8250		545	8967
	439	8243		546	8786
20s1-03	472	9458		548	8602
	474	9389		566	8563
	515	9326	20s1-08	587	9369
20s1-04	610	10471		601	9349
	612	10467		603	9125
	619	10447		606	8910
	620	10364		609	8875
	625	10262		612	8854
	629	10146		615	8786
	631	10140		618	8753
	632	10134		628	8541
	634	10128		632	8520
	637	10022	20s1-09	554	9697
	640	10010		572	9400
	650	10009		600	9392
20s1-05	629	10435		608	9375
	630	10401		626	9223
	633	10398		661	9216
	638	10368		667	9148
	641	10362	20s1-10	628	11025
	643	10359		632	10636

Instancia	Distancia	Latencia	Instancia	Distancia	Latencia
	654	10355	20s1-14	585	9770
	657	10349		591	9585
	686	10254		597	9504
	697	10251		605	9388
	699	10213	20s1-15	514	8774
20s1-11	631	10916		520	8650
	643	10182		523	8511
	650	10100		524	8476
20s1-12	585	9681		569	8449
	588	9269		570	8333
	590	9257		579	8306
	591	8923		580	8226
	594	8820		584	8162
	600	8777	20s1-16	556	9071
20s1-13	578	10824		559	8986
	581	10774		580	8982
	582	10681		586	8746
	583	10612		590	8715
	604	10370		596	8587
	605	10301		598	8526
	608	10227	20s1-17	483	8423
	609	10158		487	8422
	614	10021		523	8383
	630	9954		527	8382
	633	9930		529	8179
	637	9911		571	8063
	663	9908		572	7855
	665	9825	20s1-18	623	9924
	667	9768		625	9862

Instancia	Distancia	Latencia	Instancia	Distancia	Latencia
	630	8930		541	9919
	632	8879		562	9789
	658	8851		563	9785
	661	8810		573	9720
	666	8805		581	9680
	667	8791		615	9540
	672	8786		616	9524
	679	8748	20s1-23	456	9371
	687	8729		459	9291
20s1-19	558	8276		461	9171
	584	8183		462	9085
20s1-20	594	10087		465	9036
	600	9951		467	9032
	612	9601		470	8984
20s1-21	563	8657		472	8980
	573	8656		479	8921
	574	8387		485	8853
	575	8375		487	8849
	578	8372		490	8847
	579	8360		501	8839
	585	8356		503	8765
	586	8353		510	8718
	587	8269	20s1-24	505	9858
	591	8254		506	9843
	600	8212		511	9831
20s1-22	535	10074		512	9816
	536	10059		513	9811
	537	10050		528	9806
	540	9936		542	9419

Instancia	Distancia	Latencia	Instancia	Distancia	Latencia
	543	9385		535	20957
	549	9275		541	20928
	561	9270	20s2-03	472	28857
	565	9251		475	28837
	577	9234		512	28379
20s1-25	596	9502		518	28377
	599	9355		523	28375
	600	9304		531	27986
	601	9174	20s2-04	619	26411
	605	9131		620	26239
	614	8802		621	26224
	615	8751		625	26181
	644	8745		631	26050
20s2-01	521	25292		633	25939
	543	25243		641	25922
	548	25014		649	25916
	551	24872		662	25913
	556	24725		688	25826
	557	24652		699	25696
	558	24589		700	25633
	560	24564	20s2-05	643	26442
	562	23904		645	26154
20s2-02	418	22761		655	26097
	424	21541		666	26029
	456	21487		667	25946
	462	21415		673	25905
	465	21371		675	25879
	491	21352		681	25838
	530	20960		700	25825

Instancia	Distancia	Latencia	Instancia	Distancia	Latencia
	709	25808		651	24845
20s2-06	578	25405		654	24817
	581	25273		655	24809
	587	25268		694	24760
	589	25223		703	24694
	641	25192	20s2-09	583	27142
	649	25150		586	26923
20s2-07	542	24308		589	26592
	555	24236		590	26327
	566	24224		593	26304
	568	23751		600	26170
	570	23746		605	26017
20s2-08	584	26604		645	25971
	585	26220		669	25760
	590	26163		676	25694
	603	26140		684	25658
	610	25889		686	25582
	611	25793		693	25569
	613	25519		697	25467
	625	25138		700	25464
	628	25045		701	25462
	632	24992		704	25408
	635	24964		705	25322
	636	24956		712	25263
	639	24932	20s2-10	647	30249
	640	24924		650	30218
	647	24896		652	30041
	648	24888		655	30010
	650	24853		656	29627

Instancia	Distancia	Latencia	Instancia	Distancia	Latencia
	659	29614		664	24724
	662	29527	20s2-14	594	26419
	663	29508		601	26412
	668	29501		606	26406
	674	29495		609	26313
	679	28485		613	26288
	681	28483		620	26285
	698	28449		624	26260
	711	28440		630	26239
	713	28436		646	26094
20s2-11	645	27358		647	26029
	649	27311		658	25596
	663	27262		663	25510
	664	26277		669	25480
	669	26207		673	25431
	745	26018		677	25430
	783	25735		678	25407
	785	25701		680	25402
	788	25673		683	25400
20s2-12	575	28858		684	25377
	578	28845		687	25375
	581	28843		729	25355
	598	28560		732	25353
	600	28540		735	25331
	603	28527		738	25329
20s2-13	625	27445	20s2-15	536	25005
	627	26595		547	24678
	637	24768		554	24505
	663	24760		558	24314

Instancia	Distancia	Latencia	Instancia	Distancia	Latencia
	559	24295	20s2-17	517	22854
	561	24267		519	22757
	562	24220		522	22470
	596	24186		523	22365
	598	24094		532	22294
	599	24023		534	22109
	600	23999		535	22101
	602	23931		570	22060
	603	23858		608	22035
	611	23847		613	22012
	619	23821		615	22011
	635	23816	20s2-18	608	26893
	637	23778		609	26785
	655	23678		613	26289
	659	23664		614	26138
20s2-16	560	24702		615	25336
	569	24574		616	25320
	570	24522		617	25208
	576	24200		618	25165
	577	24172		631	25019
	578	24168		632	25002
	580	24141		635	24977
	590	24123		636	24933
	625	24089		650	24734
	626	23774	20s2-19	574	25591
	628	23768		663	25516
	638	23738		669	25479
	640	23732	20s2-20	580	24386
	649	23728		584	24277

Instancia	Distancia	Latencia	Instancia	Distancia	Latencia
	585	24266		496	22748
	588	24242		527	22320
	589	24231		529	22205
	591	23986		535	22194
	592	23975		537	22004
	601	23822		552	21990
	602	23811		554	21989
	603	23810		559	21938
20s2-21	531	26192		561	21931
	534	26164	20s2-24	523	23852
	536	26084		525	23835
	550	26020		526	23778
	551	25954		527	23750
	566	25881		535	23748
	567	25816		537	23649
	572	25459		540	23561
	573	25393		541	23533
20s2-22	555	24003		549	23409
	562	23989		562	23041
	564	23964		564	22492
	565	23943		569	22303
	566	23924		585	22236
	568	23902		588	22194
	569	23883		641	22189
	575	23792	20s2-25	581	22305
	577	23671		583	22266
20s2-23	479	22945		584	22194
	483	22907		586	22158
	486	22798		593	22018

Instancia	Distancia	Latencia	Instancia	Distancia	Latencia
	595	21614		810	12233
	620	21525		818	12217
	623	21473		881	12103
	638	21451	40s0-04	716	12163
	651	21417		719	12058
	654	21408		748	12009
	697	21357		825	12006
40s0-01	860	14396		833	11900
	862	13999	40s0-05	701	11276
	891	13902		718	11187
	933	13602		727	11141
	949	13556		747	11070
	950	13555		749	11052
40s0-02	762	13154		752	11050
	763	13146		753	10963
	769	13120	40s0-06	685	12514
	770	13112		686	11624
	775	12927		687	11532
	782	12654		689	11505
	786	12609		696	11425
	806	12590		710	11313
	808	12576		711	11291
40s0-03	791	12939		712	11150
	795	12675		713	11124
	798	12491		717	11062
	799	12449		718	11041
	800	12409		719	10964
	801	12367		720	10941
	809	12275		778	10876

Instancia	Distancia	Latencia	Instancia	Distancia	Latencia
	786	10699		768	12065
40s0-07	840	15287		776	11998
	843	15259	40s0-11	668	11512
	852	14903		673	11506
	888	14657		674	11397
	895	14562		677	11090
	897	14365		691	10992
40s0-08	601	10303		694	10986
	620	10289		699	10985
	622	10283		715	10869
	631	9962		717	10834
	633	9801		749	10828
	639	9703		751	10675
	643	9612	40s0-12	651	11408
	647	9530		652	11300
	649	9526		657	11216
	661	9347		663	11093
40s0-09	812	13085		666	10718
	814	12969		669	10411
	818	12753		692	10271
	821	12666	40s0-13	878	14446
	824	12640		880	14228
	825	12586		886	13992
	828	12560	40s0-14	674	10845
	831	12313		675	10840
	833	12266		676	10781
40s0-10	717	12888		677	10736
	722	12508		679	10711
	727	12190		680	10701

Instancia	Distancia	Latencia	Instancia	Distancia	Latencia
	692	10659		788	13706
	694	10587		801	13695
	695	10572		803	13655
40s0-15	744	12561		805	13620
	745	12535		808	13615
	750	12318		809	13553
	751	12295		810	13507
	752	12061		811	13477
	763	11913		812	13472
	775	11750		817	13444
40s0-16	923	15870		885	13424
	924	15739	40s0-19	682	11716
	964	15477		689	11550
	978	15467		700	11447
	987	15087	40s0-20	704	12554
	992	15076		712	12481
	999	15061		731	12473
	1009	15041	40s0-21	807	14157
40s0-17	716	12126		808	14030
	732	11509		809	13757
	734	11442		810	13630
	737	11315		819	13432
	739	11257		834	13369
	746	11126		838	13264
	747	11068	40s0-22	725	12344
	750	11049		731	12342
	765	11041		743	12117
	792	11034		745	12081
40s0-18	782	14061		747	11832

Instancia	Distancia	Latencia	Instancia	Distancia	Latencia
40s0-23	813	12913		872	13599
	814	12575		880	13561
	815	12570		918	13495
	820	12445		935	13410
	821	12349		940	13408
	825	12270	40s1-01	903	37683
	875	12167		909	36550
	877	12152		912	36373
	888	12148		922	36328
40s0-24	629	11187		926	36057
	632	11135		940	35932
	633	10898		941	35741
	649	10458		943	35716
	657	10424		948	35707
	708	10383		950	35682
	714	10373		958	35668
	718	10371		964	35664
	767	10340		965	35584
	768	10333		982	35509
40s0-25	824	14358		995	35361
	826	14124		1003	35290
	828	14120		1004	35231
	829	13852		1019	35203
	831	13830		1025	35201
	866	13813		1035	35178
	868	13776		1038	35132
	869	13689		1042	35127
	870	13673	40s1-02	773	35898
	871	13660		775	35480

Instancia	Distancia	Latencia	Instancia	Distancia	Latencia
	792	35293		835	29492
	795	35277		836	29462
	796	35224		837	29391
	798	35165		838	29386
	799	35161		841	29189
	804	35144		842	29172
	805	35140		843	29142
	807	34809		899	28991
	810	34540		902	28889
	815	34525	40s1-04	748	30725
	820	34511		750	30553
	821	34498		793	30180
	825	34482		794	30059
	829	34263		795	29970
	832	34262		797	29941
	841	34231		799	29935
	843	33934		802	29704
	846	33933		811	29608
	874	33864		813	29579
	929	33845		815	29573
	930	33754	40s1-05	722	32518
	931	33720		757	31821
	934	33661		761	31814
	947	33638		762	31806
	952	33509		763	31800
40s1-03	814	30699		767	31744
	816	30378		768	31738
	828	30164		772	31703
	831	29720		776	31675

Instancia	Distancia	Latencia	Instancia	Distancia	Latencia
	778	31653		954	34807
	783	31620		958	34767
	784	31614		961	34751
	813	31604		967	34680
	814	31598		982	34647
40s1-06	705	36373		998	34620
	708	35553		1000	34611
	713	34505	40s1-08	633	34701
	722	34020		634	32760
	729	33782		635	32665
	730	33475		649	32098
	732	33474		650	31848
	733	33323		654	31749
	742	33168		663	31743
	745	33014		666	31710
	753	32948		690	31556
	777	32901		691	31549
	782	32786		696	31544
	802	32760		699	31533
				700	31526
40s1-07	911	36141		708	31357
	912	35947		709	31242
	913	35867		710	31235
	927	35841		793	31168
	933	35774	40s1-09	797	33736
	942	35618		798	33725
	945	35501		799	33707
	947	35392		803	33701
	949	35094		815	33396
	951	34924			

Instancia	Distancia	Latencia	Instancia	Distancia	Latencia
	816	33292		730	28757
	817	33289		743	28740
	823	33215		767	28703
	824	33212	40s1-12	662	32052
	854	32893		696	32010
	896	32843		698	31994
	897	32842		748	31744
40s1-10	721	35423		750	31649
	722	35169		794	31625
	724	34658		796	31570
	726	34627		800	31516
	732	34358	40s1-13	897	35636
	734	34324		898	35295
	738	34094		910	34703
	740	34063		924	34501
	751	33855		925	34492
	752	33852		928	34157
	753	33822		930	34014
	754	33819		931	34004
	823	33744		932	33958
	824	33742		933	33948
40s1-11	662	31111		992	33388
	664	30188		999	33255
	681	30179		1002	33116
	682	29498	40s1-14	668	29670
	687	29447		670	29645
	694	29398		671	29276
	696	29346		672	29224
	713	29307		674	29207

Instancia	Distancia	Latencia	Instancia	Distancia	Latencia
	689	29131		976	42733
	702	29076		979	42592
40s1-15	745	30308		983	42577
	776	30306		984	42567
	777	30109		985	42423
	793	29816		991	42375
	794	29810		1004	42319
	795	29676	40s1-17	737	32583
	796	29671		741	32563
	854	29657		782	32448
	855	29651		784	32424
	857	29613		796	32372
	858	29608		798	32348
	872	29444	40s1-18	775	33303
	873	29438		777	32963
	899	29381		789	32481
	900	29375		792	32463
	906	29269		793	32239
	907	29263		796	32221
40s1-16	952	46476		801	31705
	953	45304		817	31257
	956	44447		820	31250
	958	44397		871	31234
	959	43992		872	31169
	964	43981		875	31163
	965	43975		879	31153
	967	43435		899	31146
	968	43177		900	30992
	972	43125		901	30981

Instancia	Distancia	Latencia	Instancia	Distancia	Latencia
40s1-19	688	33946		824	31718
	692	33611		825	31708
	693	33371	40s1-20	711	35512
	697	33364		730	34703
	701	33045		737	34431
	702	32566		756	34301
	708	32557		761	34243
	710	32556		768	34223
	714	32537	40s1-21	830	34664
	716	32477		831	34645
	727	32472		834	34574
	729	32471		836	34573
	733	32469		837	34461
	735	32468		838	34442
	737	32311		841	34140
	742	32230		842	34030
	745	32220		846	33634
	752	32016		849	33596
	753	32014		851	33561
	755	32013		856	33472
	756	32011		858	33422
	762	31972		862	33297
	763	31918		867	33217
	766	31908		870	33141
	767	31907		872	33116
	769	31905		874	33052
770	31904		40s1-22	740	35278
807	31873			747	34842
808	31846			756	34464

Instancia	Distancia	Latencia	Instancia	Distancia	Latencia
	762	34316		901	35126
	763	34300		902	35122
	768	34185	40s2-01	902	105964
	770	34048		904	105381
40s1-23	830	36693		906	103102
	836	35501		910	102906
	846	35393		911	102790
	857	35334		918	102695
	870	35301		921	99743
	915	35290		923	98814
40s1-24	664	33171		928	98758
	669	32407		952	98691
	687	32404		954	98678
	690	32278		955	98652
	696	32193		956	98223
	698	32010		958	98210
	700	31982		959	98181
	711	31886		965	98161
	738	31790		966	98132
	747	31784		975	98028
	799	31778		977	98015
40s1-25	831	36439		978	97956
	838	36434		980	97943
	866	35694		981	97914
	867	35690		983	97697
	876	35263		986	97644
	877	35259		987	97574
	886	35209		991	97555
	887	35205		994	97520

Instancia	Distancia	Latencia	Instancia	Distancia	Latencia
	995	97344		940	103035
	1005	97301		947	103015
	1009	97093		956	102995
	1012	97011	40s2-04	755	89636
	1017	96959		762	87868
	1021	96936		765	87803
	1023	96930		767	86561
	1030	96910		770	85808
	1032	96904		774	85427
	1037	96903		777	85421
	1039	96789		780	85403
	1042	96675		781	85387
	1046	96613		786	85362
40s2-02	781	97315		787	85288
	783	95960		790	84178
	808	92961		791	84161
	813	91222		798	84160
	830	90943		799	84143
	832	90885	40s2-05	717	94160
	850	90340		721	93429
	852	90324		723	93195
	972	90009		724	93181
	974	89991		735	93031
	990	89989		741	93003
40s2-03	854	106569		775	92900
	856	106337		778	92769
	866	104981		786	92711
	893	103361		815	92707
	902	103115		827	92693

Instancia	Distancia	Latencia	Instancia	Distancia	Latencia
40s2-06	807	102851		942	102311
	809	102643		943	102273
	812	100559		954	102164
	816	100543		956	102147
	817	99778		967	102068
	820	98919		975	102066
	821	98783		976	102056
	822	98702		977	101809
	828	97910		984	101656
	832	97836		985	101638
	840	97523		987	101500
	844	97479		992	101448
	854	97465		993	101410
	859	97433		994	101391
	883	97217		1004	101324
	921	97205		1029	101321
	930	97059		1033	101315
	950	97041		1034	101277
	960	97031		1052	101239
	976	97004			
40s2-07	924	107840	40s2-08	750	88022
	926	107582		755	87989
	927	104841		784	87947
	930	104514		786	87944
	932	103392		793	87881
	938	103260		803	87856
	939	103139		804	87771
	940	102679		817	87770
	941	102361		819	87659
				824	87608

Instancia	Distancia	Latencia	Instancia	Distancia	Latencia
40s2-09	831	87580		808	99527
	855	98534		813	99494
	859	98036		815	99472
	868	97496		829	99259
	883	97459		830	99014
	889	97448		831	98927
	900	97382		833	98853
	904	97116		838	98315
	913	97104		843	98229
	919	97096		845	98209
	920	97026		847	98191
	922	96956		852	98116
	924	96430		854	98098
	926	95961		861	98081
	934	95954		867	98080
	936	95892	40s2-11	701	99444
	937	95850		702	98858
	946	95758		703	98600
	950	95632		705	98569
	952	95562		708	98137
	953	95479		709	98005
	957	95464		710	97489
40s2-10	750	101330		717	97334
	752	101216		718	96861
	762	100811		720	96552
	769	100459		724	95317
	770	100430		725	94677
	772	100260		736	93139
	776	99887		737	93131

Instancia	Distancia	Latencia	Instancia	Distancia	Latencia
	743	93042		742	96503
	761	91932		745	96481
	770	91838		770	96427
	774	91836		773	96321
	785	91772	40s2-13	931	97774
	793	91716		942	97443
	797	91659		944	97002
	800	91332		984	96735
	801	91121		1046	95991
	804	91049		1053	95847
	811	91030		1055	95659
	819	90965		1061	95656
	831	90864		1065	95250
40s2-12	664	103003		1071	95227
	667	102456		1072	95149
	692	102430		1101	95036
	693	98243		1102	94981
	694	97877		1104	94967
	699	97700		1107	94939
	702	97652		1116	94935
	707	97621	40s2-14	674	96559
	710	97528		676	96135
	711	97474		686	95672
	714	97455		687	95362
	719	97373		764	91944
	720	96829		767	90915
	725	96615		771	90600
	733	96557		773	90051
	736	96535		793	89953

Instancia	Distancia	Latencia	Instancia	Distancia	Latencia
	795	88122		924	115152
	797	87573		925	114223
	805	87525		927	114115
	819	85478		928	113822
	821	85176		930	113714
	869	84734		935	113637
	875	84512		966	113023
	883	84475		969	112734
	888	84472		970	112719
40s2-15	794	102093		972	112480
	795	102056		975	112422
	796	101125		1001	111271
	797	101078		1004	111222
	798	101015		1007	111119
	800	101004		1009	111117
	801	98298		1015	111023
	803	98225		1028	111012
	806	97792		1031	110791
	815	97623		1033	110785
	816	97603		1040	110675
	817	97102		1048	110607
	819	97017		1050	110527
	831	96841		1054	110483
	835	96762		1056	110451
	836	96682		1058	110447
	839	96679		1122	110428
40s2-16	920	116352	40s2-17	739	106149
	921	115991		740	105612
	922	115964		751	105196

Instancia	Distancia	Latencia	Instancia	Distancia	Latencia
	761	104975	40s2-18	817	103985
	765	104862		821	103260
	768	104449		823	102754
	771	104426		828	102631
	773	103914		830	102372
	776	103768		834	102010
	779	103748		838	101675
	780	103524		839	101289
	781	103160		841	101282
	782	103143		848	101128
	784	103008		849	101070
	791	102643		851	100860
	794	102564		852	100689
	802	102050		854	100682
	805	101964		857	100641
	808	101944		859	100634
	811	101894		869	100589
	812	101556		871	100582
	815	101452		878	100570
	818	101429		896	100387
	822	101422		898	100382
	825	101399		905	100377
	837	101393	40s2-19	704	93739
	838	101358		709	93693
	839	101309		711	93670
	840	101286		713	93525
	843	101266		714	93343
	844	101253		715	92962
	847	101233		721	92901

Instancia	Distancia	Latencia	Instancia	Distancia	Latencia
	723	92888		836	95439
	728	92877		848	95317
	752	92732		850	95316
	758	92699		856	95295
	760	92694		861	95286
	764	92456		868	95278
	770	92454		878	95106
	775	92432		885	95105
	779	92417	40s2-21	840	105794
	790	92396		843	105065
	797	92381		846	104299
	799	92375		847	104029
	801	91927		865	103982
	807	91922		872	103806
	812	91895		877	103574
	813	91794		896	103554
	819	91789		898	103369
	824	91762		900	103350
40s2-20	758	98430		902	103001
	765	98030		903	102919
	768	97730		905	102845
	770	97450		908	102839
	774	97046		910	102821
	784	96938		912	102747
	785	96726		915	102741
	786	96368		924	102559
	788	96341		926	102558
	795	96020		933	102429
	821	95753		935	102428

Instancia	Distancia	Latencia	Instancia	Distancia	Latencia
	938	102274		893	96026
	939	102242		895	95704
	940	102038		896	95598
	941	102006		906	95404
	949	101878		910	95346
	950	101846			
40s2-22	768	98382	40s2-24	663	96154
	793	98273		669	95446
	794	97564		682	95355
	796	96911		689	92608
	797	96695		692	92582
	798	96572		715	92522
	806	96306		741	92444
	807	96164		745	92421
	813	95838		747	92376
	836	95498		750	92350
	837	95368		757	92328
	841	95359		759	92227
	852	95282		764	92181
	859	95087		771	92134
	860	95010		780	92022
	861	94434		795	92005
	862	94345	40s2-25	874	106509
	863	94273		875	105407
	902	93856		893	105014
40s2-23	851	97937		894	104109
	861	97801		895	104103
	882	96713		896	103927
	883	96499		897	103921
				908	103872

Instancia	Distancia	Latencia
	915	103871
	925	103808
	935	103797
	936	103772
	940	103725
	943	103440
	944	103345
	945	103241
	949	103185
	959	103174

Referencias

- [1] Francisco Angel-Bello, Ada Álvarez, and Irma García. Two improved formulations for the minimum latency problem. *Applied Mathematical Modelling*, 37(4):2257–2266, 2013.
- [2] Iris Martínez-Salazar, Francisco Angel-Bello, and Ada Álvarez. A customer-centric routing problem with multiple trips of a single vehicle. *Journal of the Operational Research Society*, 2014.
- [3] Merrill M. Flood. The traveling-salesman problem. *Operations Research*, 4(1):61–75, 1956.
- [4] Bernhard Fleischmann. The vehicle routing problem with multiple use of vehicle. Working Paper.
- [5] George B. Dantzig and John H. Ramser. The truck dispatching problem. *Management science*, 6(1):80–91, 1959.
- [6] Foto Afrati, Stavros Cosmadakis, Christos H. Papadimitriou, George Papageorgiou, and Nadia Papakostantinou. The complexity of the travelling repairman problem. *Informatique Theorique et Applications*, 20(1):79–87, 1986.
- [7] Francisco Angel-Bello, Iris Martínez-Salazar, and Ada Álvarez. Minimizing waiting times in a route design problem with multiple use of a single vehicle. *Electronic Notes in Discrete Mathematics*, 41:269–276, 2013.
- [8] Walter William Rouse Ball and Harold Scott Macdonald Coxeter. *Mathematical Recreations & Essays... Revised by HSM Coxeter...* Macmillan & Company, 1939.

- [9] Isidor Heller. On the problem of shortest path between points. 1. In *Bulletin of the American Mathematical Society*, volume 59, pages 551–551. Amer Mathemematical Soc 201 Charles ST, Providence, RI 02940-2213, 1953.
- [10] H. Kuhn. The traveling salesman problem. In *Sixth Symposium in Applied Mathematics*. American Mathemematical Society, Mc Graw-Hill Company.
- [11] George Dantzig, Ray Fulkerson, and Selmer Johnson. Solution of a large-scale traveling-salesman problem. *Journal of the operations research society of America*, 2(4):393–410, 1954.
- [12] Gilbert Laporte. The traveling salesman problem: An overview of exact and approximate algorithms. *European Journal of Operational Research*, 59(2):231–247, 1992.
- [13] David S. Johnson and Lyle A. McGeoch. The traveling salesman problem: A case study in local optimization. *Local search in combinatorial optimization*, 1:215–310, 1997.
- [14] Jill Cirasella, David S. Johnson, Lyle A. McGeoch, and Weixiong Zhang. The asymmetric traveling salesman problem: Algorithms, instance generators, and tests. In *Algorithm Engineering and Experimentation*, pages 32–59. Springer, 2001.
- [15] AJ Orman and H. Paul Williams. A survey of different integer programming formulations of the travelling salesman problem. *Optimisation, economics and financial analysis. Advances in computational management science*, 9:93–106, 2006.
- [16] Clair E. Miller, Albert W. Tucker, and Richard A. Zemlin. Integer programming formulation of traveling salesman problems. *Journal of the ACM (JACM)*, 7(4):326–329, 1960.
- [17] David L. Applegate, Robert E. Bixby, Vasek Chvatal, and William J. Cook. *The Traveling Salesman Problem: A Computational Study*. Princeton university press, 2011.
- [18] Robert G. Bland and David F. Shallcross. Large travelling salesman problems arising from experiments in X-ray crystallography: a preliminary report on computation. *Operations Research Letters*, 8(3):125–128, 1989.

- [19] Jan Karel Lenstra and Ahg Rinnooy Kan. *Some simple applications of the travelling salesman problem*. Mathematisch Centrum, 1974.
- [20] Pamela C. Nolz, Karl F. Doerner, Walter J. Gutjahr, and Richard F. Hartl. A bi-objective metaheuristic for disaster relief operation planning. In *Advances in multi-objective nature inspired computing*, pages 167–187. Springer, 2010.
- [21] Ann Melissa Campbell, Dieter Vandenbussche, and William Hermann. Routing for relief efforts. *Transportation Science*, 42(2):127–145, 2008.
- [22] Chandra Chekuri, Rameev Motwani, Balas Natarajan, and Clifford Stein. Approximation techniques for average completion time scheduling. *SIAM Journal on Computing*, 31(1):146–166, 2001.
- [23] Isabel Méndez-Díaz, Paula Zabala, and Abilio Lucena. A new formulation for the traveling deliveryman problem. *Discrete Applied Mathematics*, 156(17):3223–3237, 2008.
- [24] J. Sarubbi, H. Luna, and G. Miranda. Minimum latency problem as a shortest path problem with side constraints. In *XIV latin Ibero-American congress on operations research (CLAIO)*, 2008.
- [25] Jean-Claude Picard and Maurice Queyranne. The time-dependent traveling salesman problem and its application to the tardiness problem in one-machine scheduling. *Operations Research*, 26(1):86–110, 1978.
- [26] M. Tyagi. A practical method for the truck dispatching problem. *Journal of the Operations Research Society of Japan*, 10:76–92, 1968.
- [27] Nabila Azi, Michel Gendreau, and Jean-Yves Potvin. An exact algorithm for a single-vehicle routing problem with time windows and multiple routes. *European journal of operational research*, 178(3):755–766, 2007.
- [28] Nabila Azi, Michel Gendreau, and Jean-Yves Potvin. An exact algorithm for a vehicle routing problem with time windows and multiple use of vehicles. *European Journal of Operational Research*, 202(3):756–763, 2010.

- [29] Cynthia Barnhart, Ellis . Johnson, George L. Nemhauser, Martin WP Savelsbergh, and Pamela H. Vance. Branch-and-price: Column generation for solving huge integer programs. *Operations research*, 46(3):316–329, 1998.
- [30] Paolo Toth and Daniele Vigo. *The vehicle routing problem*. Society for Industrial and Applied Mathematics, 2001.
- [31] Emile Aarts and Jan Korst. Simulated annealing and Boltzmann machines. *Wiley-Interscience series in discrete mathematics and optimization*, 1988.
- [32] Victor J. Rayward-Smith, Ibrahim H. Osman, Colin R. Reeves, and George D Smith. *Modern heuristic search methods*. Wiley New York, 1996.
- [33] CKY Lin and RCW Kwok. Multi-objective metaheuristics for a location-routing problem with multiple use of vehicles on real data and simulated data. *European Journal of Operational Research*, 175(3):1833–1849, 2006.
- [34] Nenad Mladenović and Pierre Hansen. Variable neighborhood search. *Computers & Operations Research*, 24(11):1097–1100, 1997.
- [35] Ulrich Derigs, René Kurowsky, and Ulrich Vogel. Solving a real-world vehicle routing problem with multiple use of tractors and trailers and eu-regulations for drivers arising in air cargo road feeder services. *European Journal of Operational Research*, 213(1):309–319, 2011.
- [36] Nabila Azi, Michel Gendreau, and Jean-Yves Potvin. *An adaptive large neighborhood search for a vehicle routing problem with multiple trips*. CIRRELT, 2010.
- [37] Vilfredo Pareto. *Manuale di economia politica*, volume 13. Societa Editrice, 1906.
- [38] Lofti Zadeh. Optimality and non-scalar-valued performance criteria. *Automatic Control, IEEE Transactions on*, 8(1):59–60, 1963.
- [39] Chankong Vira and Yacov Y. Haimes. *Multiobjective decision making: theory and methodology*. Number 8. North-Holland, 1983.
- [40] Frederick M. Waltz. An engineering approach: hierarchical optimization criteria. *Automatic Control, IEEE Transactions on*, 12(2):179–180, 1967.

- [41] P. Le Yu. Cone convexity, cone extreme points, and nondominated solutions in decision problems with multiobjectives. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 14(3):319–377, 1974.
- [42] Milan Zeleny and James L. Cochrane. *Multiple criteria decision making*. University of South Carolina Press, 1973.
- [43] Matthias Ehrgott. *Multicriteria optimization*. Springer Science & Business Media, 2006.
- [44] Kalyanmoy Deb, Amrit Pratap, Sameer Agarwal, and Tamt Meyarivan. A fast and elitist multiobjective genetic algorithm: NSGA-II. *Evolutionary Computation, IEEE Transactions on*, 6(2):182–197, 2002.
- [45] Haiming Lu and Gary G. Yen. Rank-density-based multiobjective genetic algorithm and benchmark test function study. *Evolutionary Computation, IEEE Transactions on*, 7(4):325–343, 2003.
- [46] J. David Schaffer. Multiple objective optimization with vector evaluated genetic algorithms. In *Proceedings of the 1st International Conference on Genetic Algorithms, Pittsburgh, PA, USA, July 1985*, pages 93–100, 1985.
- [47] George Mavrotas. Effective implementation of the ε -constraint method in multi-objective mathematical programming problems. *Applied mathematics and computation*, 213(2):455–465, 2009.
- [48] George Mavrotas and Kostas Florios. An improved version of the augmented ε -constraint method (AUGMECON2) for finding the exact pareto set in multi-objective integer programming problems. *Applied Mathematics and Computation*, 219(18):9652–9669, 2013.
- [49] Nidamarthi Srinivas and Kalyanmoy Deb. Multiobjective optimization using non-dominated sorting in genetic algorithms. *Evolutionary computation*, 2(3):221–248, 1994.
- [50] Thomas A. Feo and Mauricio Resende. Greedy randomized adaptive search procedures. *Journal of global optimization*, 6(2):109–133, 1995.

- [51] Rafael Martí, Vicente Campos, Mauricio Resende, and Abraham Duarte. Multi-objective grasp with path-relinking. *AT&T Labs Research Technical Report*, 2011.
- [52] M. Angélica Salazar-Aguilar, Roger Z. Ríos-Mercado, and José Luis González-Velarde. GRASP strategies for a bi-objective commercial territory design problem. *Journal of Heuristics*, 19(2):179–200, 2013.
- [53] Eckart Zitzler and Lothar Thiele. Multiobjective optimization using evolutionary algorithms– A comparative case study. In *Parallel problem solving from nature-PPSN V*, pages 292–301. Springer, 1998.
- [54] Murray Rosenblatt. A central limit theorem and a strong mixing condition. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 42(1):43–47, 1956.

Ficha autobiográfica

Eduardo Valdés García

Candidato para el grado de Maestría en Ciencias en
Ingeniería de Ingeniería de Sistemas

Universidad Autónoma de Nuevo León

Facultad de Ingeniería Mecánica y Eléctrica

Tesis:

**PROBLEMA BIOBJETIVO DEL AGENTE VIAJERO CON
MÚLTIPLES VIAJES**

Nací el 8 de junio de 1990 en el municipio de Arteaga, Coahuila. Realicé mis estudios de licenciatura en la Universidad Autónoma de Coahuila, donde obtuve el grado de Licenciado en Matemáticas Aplicadas en 2012. Dos años mas tarde me incorporé a la Universidad Autónoma de Nuevo León para realizar mis estudios de posgrado. Actualmente, soy candidato para obtener el grado de Maestro en Ciencias con Especialidad en Ingeniería de Sistemas.